



Universidad Central de Venezuela  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física

# **EFFECTOS TOPOLÓGICOS Y CUANTIZACIÓN EN CORRIENTES DE ESPÍN**

Vanessa C. Torres Montilla

Caracas, Mayo 2010

# EFFECTOS TOPOLÓGICOS Y CUANTIZACIÓN EN CORRIENTES DE ESPÍN

Vanessa C. Torres Montilla

Trabajo especial de grado presentado  
ante la Facultad de Ciencias de la ilustre  
Universidad Central de Venezuela como  
requisito parcial para optar al título de:  
**Licenciado en Física.**

---

Dr. Ernesto Medina, Tutor

Fecha

---

Dr. Alexander López, Co-Tutor

Fecha

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. **Vanessa C. Torres Montilla** titulado: **Efectos Topológicos y Cuantización en Corrientes de Espín**, para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

---

Dr. Ernesto Medina, Tutor

Fecha

---

Dr. Alexander López, Co-tutor

Fecha

---

Dr. Félix Marín

Fecha

---

Dr. John Mantilla

Fecha

## Resumen

### EFECTOS TOPOLÓGICOS Y CUANTIZACIÓN EN CORRIENTES DE ESPÍN

Vanessa C. Torres Montilla

Escuela de Física, Universidad Central de Venezuela

Dr. Ernesto Medina, Tutor

Dr. Alexander López, Co-tutor

En este trabajo se realiza el desarrollo y análisis de un filtro de espín en dos dimensiones, basado en el interferómetro Mach-Zehnder, tanto para estados de entrada puros como para estados mezclados, en presencia de un campo magnético externo e interacción espín-órbita Rashba y Dresselhaus. Este tipo de interacción espín-órbita es producida en materiales semiconductores que no poseen simetría de inversión. Para este caso la interacción espín-órbita se representa como una teoría de calibre  $SU(2) \times U(1)$ , obteniendo así una formulación no Abeliانا del campo de calibre, tipo campo de Yang-Mills. Se analizarán las condiciones necesarias para obtener un filtro de espín así como los invariantes topológicos.

---

Dr. Ernesto Medina  
Tutor

---

Dr. Alexander López  
Co-tutor

*A mis padres, a Necho, a mis hermanitos y  
a mi abuelito Ignacio que recordare siempre  
con mucho cariño.*

# Agradecimientos

- A mis tutores Ernesto Medina y Alexander López por todas sus enseñanzas, así como también por la paciencia que me tuvieron en la realización de este trabajo.
- A mis padres Bolivia, Carlos y Andrés, a mis hermanitos Andreina, David y Abraham, quienes siempre me han brindado un gran apoyo y un inmenso amor.
- A Carlet y Alejandra, con las cuales he compartido amistad desde los primeros semestres de mi carrera. Gracias por sus consejos y su compañía. También agradezco a mis compañeros de clase, en especial a Grecia, León y Miguel, por los esfuerzos que conjuntamente realizamos en los últimos semestres.
- A Richard que a pesar del poco tiempo juntos, se supo ganar un lugar muy especial en mi vida. Te quiero mucho.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Objetivo General . . . . .	5
1.2. Objetivos Específicos . . . . .	5
<b>2. Interacción Espín-Órbita</b>	<b>6</b>
2.1. Espín . . . . .	6
2.2. Interacción Espín-Órbita . . . . .	7
2.3. Simetrías de Inversión . . . . .	10
2.4. Interacción Espín-Órbita en Dos Dimensiones . . . . .	12
2.5. Corriente de Espín . . . . .	15
<b>3. Fases Topológicas y Teoría de Calibre No Abeliana</b>	<b>18</b>
3.1. Efecto Aharonov-Bohm . . . . .	18
3.2. Efecto Aharonov-Casher . . . . .	21
3.3. Teoría de Calibre No Abeliana $SU(2)$ (Yang-Mills) . . . . .	22
<b>4. Interferómetro Electrónico y Filtro de Espín</b>	<b>28</b>
4.1. Estado Puro de Espín . . . . .	28
4.2. Interferómetro Electrónico Mach-Zehnder . . . . .	30
4.3. Filtro de Espín: Interferómetro de Brazos Asimétricos . . . . .	31
4.3.1. <b>Filtro de Espín en Ejes no Inclinados</b> . . . . .	36
4.3.2. <b>Filtro de Espín en Ejes Inclinados</b> . . . . .	38
<b>5. Interferómetro y Matriz Densidad</b>	<b>44</b>
5.1. Estados Mezclados de Espín . . . . .	44
5.2. Interferómetro con Estados de Inyección Mezclados . . . . .	46

<b>6. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Relación de Unitariedad</b>	<b>53</b>
<b>B. Gráficas en Mathematica 5.0</b>	<b>55</b>

## Motivación

La manipulación del espín es de gran interés debido a sus distintas aplicaciones en procesos informáticos y computación cuántica. El uso de materiales semiconductores en los cuales se origina interacción espín-órbita debido a la ausencia de simetría de inversión espacial, permite dicha manipulación. La interacción espín-órbita, tiene una representación  $SU(2)$ , y la cual presenta un rompimiento de la simetría de calibre, originando consecuencias en el transporte de espín en sistemas bidimensionales. Entre las aplicaciones de este tipo de interacción se encuentran los filtros de espín, como el basado en el interferómetro electrónico Mach-Zehnder. En dicho interferómetro es posible el estudio de partículas cargadas en un campo magnético alto. La generación y el análisis de los filtros de espín, es de gran interés en este campo y es por ello que se estudia el efecto en las propiedades del filtro, debido a cambios en la longitud de los brazos al inyectar un estado puro al sistema. Otro aspecto de interés es el análisis de la polarización y la entropía en la interferometría electrónica cuando el estado de inyección está completamente mezclado.

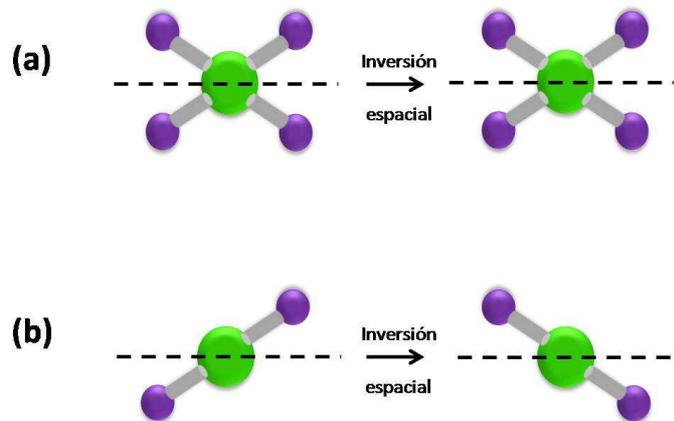
# Capítulo 1

## Introducción

El estado de una partícula a nivel cuántico puede ser expresado mediante una función de onda  $\Psi$ , la cual depende de tres variables espaciales que describen la posición y de una cuarta variable que describe el momento angular intrínseco o espín. Entre las evidencias experimentales que demostraron la existencia del espín está el famoso experimento de Stern y Gerlach en 1922, sin embargo no es hasta 1925 cuando Goudsmit y Uhlenbeck postularon que el electrón tiene un momento angular intrínseco, basándose en el estudio de los espectros atómicos [1].

La manipulación del espín es de gran interés por sus aplicaciones en computación cuántica y procesos informáticos. Entre los mecanismos para la manipulación del espín destacan el uso de un campo magnético y el acoplamiento espín-órbita, el cual permite la manipulación del espín mediante un campo eléctrico. El acoplamiento espín-órbita en los sólidos puede ser originado por el movimiento de un electrón, a una alta velocidad de Fermi, en un campo eléctrico fuerte cerca de un núcleo atómico, ó debido a la ausencia de simetría de inversión espacial de ciertos cristales, Figura 1.1. En el último caso se encuentran los acoplamientos espín-órbita tipo Dresselhaus y Rashba. El acoplamiento Dresselhaus se produce en sistemas tanto tridimensionales como bidimensionales y es originado por un campo interno cuando la estructura se caracteriza por no tener simetría de inversión en el bulto. Por otro lado el acoplamiento tipo Rashba se produce al aplicar un potencial eléctrico externo, que generará en el sistema una asimetría de inversión estructural [2]. Esta clase de interacción ocurre en materiales semiconductores como los de estructura tipo diamante, las estructuras zinc blende, y compuestos como GaAs y InSb [3].

Entre las aplicaciones para este tipo de interacción espín-órbita resultan de gran interés los filtros de espín. Los filtros de espín permiten seleccionar un eje privilegiado de algún estado, que es inyectado en un sistema con determinadas propiedades. Un ejemplo de ello es el citado en la referencia [16], el cual consiste en un filtro de espín basado en el interferómetro electrónico Mach-Zehnder, y se caracteriza por poseer acoplamiento espín-órbita Rashba y Dresselhaus, y estar en presencia de un flujo magnético. En dicho sistema se polariza un haz fermiónico. En este caso es importante destacar la presencia del efecto Aharonov-Bohm y Aharonov-Casher. El primero que será estudiado en detalle, se origina debido al cambio en el patrón de interferencia inducido en las partículas cargadas cuando éstas están en presencia de un flujo magnético, lo cual crea una fase dependiente de dicho flujo. El segundo fenómeno es debido a la no conmutatividad de las componentes de espín, en el caso de partículas eléctricamente neutras. También se destaca que dicho sistema posee una representación  $SU(2) \times U(1)$ , obteniendo así una formulación no Abelianna del campo de calibre, tipo campo de Yang-Mills.



**Figura 1.1:** (a) Muestra una estructura con simetría de inversión espacial respecto al eje señalado. (b) Muestra estructura sin simetría de inversión espacial.

Como es bien sabido, la teoría de Yang-Mills [4], fue desarrollada en 1954 y en ésta se propone que la interacción nuclear fuerte sea descrita por una teoría de campo, como en el caso del electromagnetismo. Ellos postularon que el grupo local de calibre debía ser el grupo del isoespín en  $SU(2)$ , el cual es no Abelianno y desarrollaron las reglas de transformación local para los campos de calibre y expresaron el tensor de curvatura  $F_{\mu\nu}$

en términos del campo de calibre ó conexión  $A_\mu$ . Históricamente la idea del isospín fue introducida por Heisenberg en 1932, para describir los estados de dos cargas, neutrón y protón, en el núcleo. Al no considerar la interacción electromagnética, el neutrón y el protón son dos estados de la misma partícula, ya que presentan una masa similar y el núcleo contiene igual número de ellas. Se etiquetó al protón como el estado “isospín para arriba” y al neutrón como “isospín para abajo”, y se consideró que el isospín debe ser invariante bajo simetría de rotación. Esta teoría es de gran importancia en el estudio de interacciones fuertes entre quarks y la unificación entre la interacción débil y el electromagnetismo [4].

La estructura de este trabajo de investigación es como sigue. En el capítulo 2 se analiza la interacción espín-órbita, así como otros aspectos de importancia, como la simetría de inversión espacial, la simetría de inversión temporal y la corriente de espín. Se considera de gran interés en esta sección la interacción espín-órbita en  $2D$ . En el capítulo 3 se explicarán brevemente el efecto Aharonov-Bohm, Aharonov-Casher y la teoría de calibre no Abelian  $SU(2)$ . En el capítulo 4 se explica el funcionamiento del interferómetro electrónico Mach-Zehnder en el caso Abelian y se describe la extensión al caso no Abelian considerando brazos asimétricos con interacción espín-órbita tipo Rashba y Dresselhaus, en presencia de un flujo magnético. En este sistema se buscan las condiciones necesarias para lograr un filtro de espín y a su vez se analiza el comportamiento del filtro al variar las proporciones entre los brazos. También se estudia el comportamiento de las constantes de acoplamiento espín-órbita para Rashba y Dresselhaus y el flujo magnético, al imponer las condiciones necesarias para filtrar una de las componentes del espinor, a la salida del sistema. En el capítulo 5 se estudia un interferómetro de brazos simétricos, tipo Mach-Zehnder con interacción espín-órbita tipo Rashba y Dresselhaus, en presencia de un flujo magnético, cuando se inyecta un estado mezclado, caracterizado por la matriz densidad  $\rho_0$ , y se analiza el comportamiento de la señal en los detectores de salida. Por último se estudia la polarización y la entropía del estado en cada detector.

## 1.1. Objetivo General

Estudiar analíticamente algunos mecanismos de generación de estados polarizados de espín, en materiales con ruptura de simetrías espaciales y efectos del acoplamiento espín-órbita.

## 1.2. Objetivos Específicos

1. Analizar el transporte de corrientes de espín en materiales con ruptura de simetrías espaciales.
  - i) Ruptura de simetría de inversión estructural.
  - ii) Ruptura de simetría de inversión de bulto.
2. Desarrollar modelos simples para la generación de estados polarizados de espín en sistemas fermiónicos bidimensionales con presencia de campos electromagnéticos uniformes.
3. Investigar los efectos topológicos debidos al acoplamiento espín-órbita en materiales con ruptura de simetría de inversión.

# Capítulo 2

## Interacción Espín-Órbita

### 2.1. Espín

En 1922, Stern y Gerlach diseñaron un experimento con el cual lograron medir el momento magnético de un átomo de plata, dirigiendo dicho haz entre los polos de un imán que se caracterizaba por tener un campo magnético inhomogéneo, en la dirección  $z$ . Antes de este experimento se creía que los átomos poseían un momento magnético dirigido en cualquier dirección posible y al abandonar el imán, se distribuirían según sus componentes verticales del momento magnético, por lo cual se esperaba una distribución continua de plata, al recolectar los átomos por deposición sobre una lámina de vidrio. Lo que observaron experimentalmente fue un desdoblamiento en dos componentes simétricas del haz, lo cual llevó más tarde a introducir el concepto de espín para explicar correctamente el fenómeno observado [6].

La introducción del espín fue hecha en 1925 por Goudsmit y Uhlenbeck, quienes intentaban explicar la estructura fina observada en el espectro de ciertos átomos. Ellos propusieron que el electrón debía tener un impulso angular y un momento magnético intrínsecos. Para describir al estado de un electrón se necesitan cuatro números cuánticos, donde tres de ellos nos indican las coordenadas espaciales y el cuarto nos describe la orientación del espín, pudiendo ser espín para arriba ó espín para abajo, en relación con algún eje  $z$ . En 1929 Dirac desarrolló una teoría relativista de la mecánica cuántica y haciendo uso de los postulados de la teoría de Schrödinger, pudo demostrar que el electrón posee un momento angular intrínseco caracterizado por los números cuánticos  $s$  y  $m_s$ , los cuales son análogos a  $\ell$  y  $m_\ell$  asociados al momento orbital. Debido a que ex-

perimentalmente se obtienen dos proyecciones del haz los números cuánticos son  $s = \frac{1}{2}$  y  $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Formalmente, el espín está representado por un operador hermítico  $\mathbf{S}$  que se expresa como [7]:

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \quad (2.1)$$

donde  $\sigma_i$  representan las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

las cuales cumplen con las siguientes relaciones:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.3)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (2.4)$$

$$\sigma_i^2 = \mathbb{I}, \quad (2.5)$$

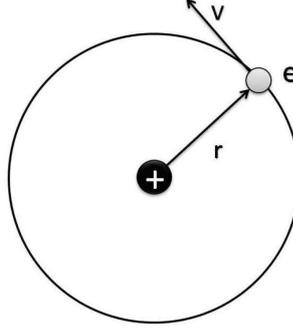
donde  $[\sigma_i, \sigma_j]$  es el conmutador,  $\{\sigma_i, \sigma_j\}$  es el anticonmutador e  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad, en el espacio de espín.

## 2.2. Interacción Espín-Órbita

La interacción espín-órbita es un fenómeno relativista relacionado con el momento magnético intrínseco de espín. El momento intrínseco de una partícula es expresado como:

$$\boldsymbol{\mu} = g_s \frac{q}{2m_0} \mathbf{S}, \quad (2.6)$$

donde  $g_s$  es llamado factor giromagnético de espín y experimentalmente tiene un valor de  $g \simeq 2,0023$  para el electrón [8]. Si consideramos un átomo monoeléctrico el Hamiltoniano se puede expresar como:  $H = H_0 - \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}_{so}$ .



**Figura 2.1:** Movimiento del electrón visto por el núcleo

El último término es debido a la interacción entre el movimiento orbital de la partícula y el espín. Si una partícula cargada se mueve con una velocidad  $\mathbf{V}$  en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , y un observador que se mueve con dicha partícula, verá un campo inducido  $\mathbf{B}_{so} = -\mathbf{V}/c \times \mathbf{E}$ , (Figura 2.1). En este caso el campo eléctrico es generado por el núcleo. Como la partícula se mueve dentro de un campo de fuerza central, el campo eléctrico se puede expresar en la forma:  $\mathbf{E} = -\frac{d\phi}{dx} \frac{\mathbf{r}}{r}$ , donde  $\phi$  es el potencial eléctrico. Considerando adicionalmente la precesión de Thomas la ecuación (2.6) puede ser escrita como:

$$H = H_o + \frac{1}{2qm_0} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{L}. \quad (2.7)$$

Si ahora consideramos que existe un campo magnético externo, el Hamiltoniano será:

$$H = H_o + \frac{1}{2qm_0c} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{L} - \boldsymbol{\mu}_L \cdot \mathbf{B} - \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

El segundo término de la ecuación (2.8) se debe a la interacción espín-órbita, mientras que los dos últimos son debidos a la interacción entre el momento orbital y el momento

intrínseco de espín con el campo magnético externo, respectivamente. En el caso de un átomo monoelectrónico, dicha ecuación puede escribirse en la forma:

$$H = H_0 + \frac{e^2}{2m_0^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} + \frac{e}{2m} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.9)$$

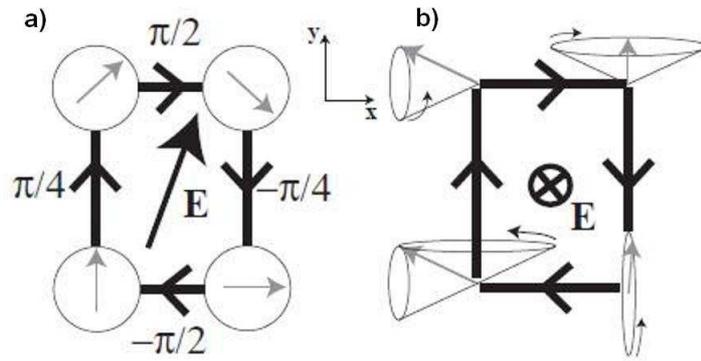
donde  $H_0 = (\mathbf{P} + e\mathbf{A})^2/(2m_0) + e\phi$ ,  $\mathbf{P}$  es el momento lineal del electrón y  $\mathbf{A}$  vector, asociado al campo externo  $\mathbf{B}$ .

Desde una perspectiva más formal la interacción espín-órbita, puede ser estudiada mediante el Hamiltoniano de Pauli, el cual tiene la siguiente forma:

$$H = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m_0} + V + \frac{e\hbar}{2m_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \frac{e\hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \times \mathbf{E}}{4m_0^2 c^2} - \frac{e\hbar^2}{8m_0^2 c^2} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (2.10)$$

donde el primer término es debido a la energía cinética, el segundo es un potencial, que se considera simétrico en este caso. El cuarto y quinto término son el término Zeeman y el término de interacción espín-órbita, respectivamente. El último es el término de Darwin. El Hamiltoniano (2.10) tiene una representación en  $SU(2) \times U(1)$  y en ésta existe un rompimiento de la simetría de calibre asociada al grado de libertad representado en  $SU(2)$  [9]. Esto tendrá consecuencias en el transporte de espín en sistemas bidimensionales.

En la referencia [9] se analizan las consecuencias topológicas de este rompimiento de simetría de calibre. En dicha referencia se considera una red en ausencia del potencial de calibre  $U(1)$ , y los vectores en la red están descritos por  $\mathbf{R} = n\mathbf{v} + m\mathbf{w}$ , donde  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son los vectores unitarios para dicha red. Cuando el campo eléctrico está en el plano de los vectores del cristal ocurre una cuantización en la trayectoria cerrada de la precesión del espín, Figura 2.2(a), y en el caso en que el campo eléctrico sea perpendicular a dicho plano de los vectores del cristal, no surge dicha cuantización, Figura 2.2(b).



**Figura 2.2:** (a) Se muestra la dirección de la precesión del espín en una trayectoria cerrada, cuando el campo eléctrico está en el plano. (b) Se muestra la dirección de la precesión del espín en una trayectoria cerrada, cuando un campo eléctrico es perpendicular al plano [9].

### 2.3. Simetrías de Inversión

En los sólidos, el comportamiento de los electrones es caracterizado por las bandas de energía  $E(\mathbf{k})$  y el vector de onda  $\mathbf{k}$ . La interacción espín-órbita tiene consecuencias sobre las bandas de energía. Consideremos la expresión (2.7) a la cual se le añade un potencial simétrico  $V(\mathbf{r})$  y el cual posee la simetría de la red. Dicha fórmula puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{4mc^2} \boldsymbol{\sigma} \times \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P} + V(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

La función de onda para el Hamiltoniano anterior, según el teorema de Bloch posee la siguiente forma:

$$\Psi_{\mathbf{k},\sigma}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathcal{U}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}), \quad (2.12)$$

Donde  $\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  es una función periódica sobre la red cristalina y  $\boldsymbol{\sigma}$  denota la parte correspondiente al espín. En este caso se considera un sistema sin campo magnético externo.

El Hamiltoniano (2.11) es invariante bajo inversiones espaciales y temporales.

Ahora bien, debido a que las propiedades de simetría son relevantes en nuestro estudio, daremos una descripción abreviada de los elementos esenciales de las operaciones de inversión espacial y temporal, y para una consideración más detallada de estas simetrías, referimos al lector a las referencias [3, 10]. El operador de inversión temporal es  $\mathcal{T} = U\mathcal{T}_0$ , donde  $\mathcal{T}_0$  es la operación de conjugación compleja que convierte al momento  $\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{P}$  y deja invariante a la posición,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ , mientras  $U$  es un operador unitario de espín que conmutará con  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{r}$ . Este último operador cambia la dirección del espín  $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow -\boldsymbol{\sigma}$ . El Hamiltoniano (2.11) es invariante bajo inversiones temporales por lo cual conmuta con  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}H = H\mathcal{T}$ . Se sabe que (2.12) es autofunción de  $H$  con autovalores reales  $E$ ,  $H\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}} = E\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}}$ , entonces se tiene que:

$$\mathcal{T}H\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}} = H\mathcal{T}\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}} = E\mathcal{T}\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}},$$

Se sabe que  $\mathcal{T}\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}} = \Psi_{-\mathbf{k},-\boldsymbol{\sigma}}$ , y esto lleva a la siguiente degeneración (degeneración de Kramers):

$$E_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{k}) = E_{-\boldsymbol{\sigma}}(-\mathbf{k}). \quad (2.13)$$

Por otro lado, bajo las inversiones espaciales el operador  $\mathcal{K}$  convierte a  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{P}$ , y no cambia la dirección del espín ya que  $\mathcal{K}$  conmuta con  $\boldsymbol{\sigma}$ . En este caso se cumple que  $\mathcal{K}V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$ , por lo que el Hamiltoniano (2.11) resulta invariante bajo inversiones espaciales y tomando en cuenta la relación  $\mathcal{K}\Psi_{\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \Psi_{-\mathbf{k},\boldsymbol{\sigma}}(-\mathbf{r})$ [10], se origina una degeneración en la energía:

$$E_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{k}) = E_{\boldsymbol{\sigma}}(-\mathbf{k}). \quad (2.14)$$

Ambas simetrías de inversión cambian el vector de onda  $\mathbf{k}$  por  $-\mathbf{k}$ , y la inversión temporal cambia la dirección del espín, lo cual lleva a una degeneración de la energía de la partícula, es decir  $E_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{k}) = E_{-\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{k})$ . Esto se denomina la degeneración de espín. Si ahora la estructura se caracteriza por no tener simetría de inversión la degeneración es

removida  $E_{\sigma}(\mathbf{k}) \neq E_{-\sigma}(\mathbf{k})$ , obteniendo una brecha en la energía que se manifiesta a través de la aparición de dos bandas energéticas, para cada componente de espín,  $E_{\sigma}(\mathbf{k})$  y  $E_{-\sigma}(\mathbf{k})$ . Aunque el sistema posea inversión asimétrica se mantiene la degeneración de Kramers siempre que  $B = 0$  [3].

## 2.4. Interacción Espín-Órbita en Dos Dimensiones

En los sólidos el acoplamiento espín-órbita puede ser producido por la ausencia de simetría de inversión en el bulto o por la ausencia de simetría de inversión estructural en los cristales. Entre este tipo de interacción espín-órbita se encuentran los acoplamientos tipo Rashba y Dresselhaus [2, 3]. Considerando un sistema bidimensional, el Hamiltoniano para una partícula, que se encuentra en un sistema con ausencia de simetría de inversión se puede expresar como:

$$H = H_0 + H_D + H_R,$$

$$H_D = \beta_0 k_x (k_y^2 - k_z^2) \sigma_x + p.c., \quad (2.15)$$

$$H_R = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla V). \quad (2.16)$$

La expresión (2.15), se origina por la inversión asimétrica del bulto. Este término corresponde al Hamiltoniano de Dresselhaus. En dicha expresión  $k_i$  ( $i=x,y,z$ ) es el vector de onda y está en los ejes principales del cristal,  $p.c$  son permutaciones cíclicas para todos los índices. Como se mencionó anteriormente se considera un sistema bidimensional y el confinamiento en el que se encuentra la partícula es a lo largo de [001], entonces se tiene que  $\langle k_z \rangle = 0$ , mientras que  $\langle k_z^2 \rangle \approx (\pi/d^2)$ , donde  $d$  es el tamaño del confinamiento. Los términos de  $k^3$  son despreciados, lo que hace entonces que la expresión (2.15) tome la siguiente forma:

$$H_D = \beta(k_y \sigma_y - k_x \sigma_x). \quad (2.17)$$

La constante  $\beta \approx \beta_0(\pi/d)^2$  y  $\beta_0 \approx 27eV\text{\AA}^3$  para GaAs y el InAs [2]. Por otro lado la expresión (2.16) es el Hamiltoniano de Rashba y se origina debido a la ausencia de simetría de inversión estructural debido a un potencial  $V$  externo, no simétrico. En este caso se considera un potencial con variación a lo largo de la dirección  $z$ . La expresión (2.16) tomará la forma:

$$H_R = \alpha(k_y\sigma_x - k_x\sigma_y). \quad (2.18)$$

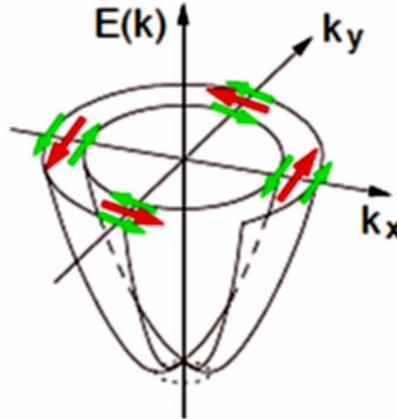
La constante  $\lambda = -\hbar^2/4m^*c^2$  y la constante  $\alpha$  depende del gradiente del potencial aplicado. Consideremos ahora sólo el acoplamiento Rashba, y  $H_0 = \hbar^2k^2/2m^*$ . Se puede encontrar fácilmente que la energía de dispersión en este caso es:

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m^*}k_{\parallel}^2 \pm \alpha k_{\parallel}, \quad (2.19)$$

donde el vector de onda  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y, 0)$  [3, 26]. En la Figura 2.3 se puede observar un esquema de la relación de dispersión. En ésta se observa claramente que  $E_{\uparrow}(\mathbf{k}) \neq E_{\downarrow}(\mathbf{k})$ , obteniendo dos bandas en la energía de dispersión  $E_{\uparrow}(\mathbf{k})$  y  $E_{\downarrow}(\mathbf{k})$ , es decir la degeneración espacial es removida, sin embargo se mantiene la degeneración de Kramers como se mencionó en la sección anterior.

Al estudiar este tipo de fenómeno es importante destacar la presencia del campo magnético efectivo, el cual es responsable de la precesión del espín. El valor de expectación del operador de espín  $\mathbf{S}$  nos da la dirección del espín. Esta idea es análoga al comportamiento del espín al aplicar un campo magnético externo. En este caso el campo magnético efectivo es definido de la siguiente forma:

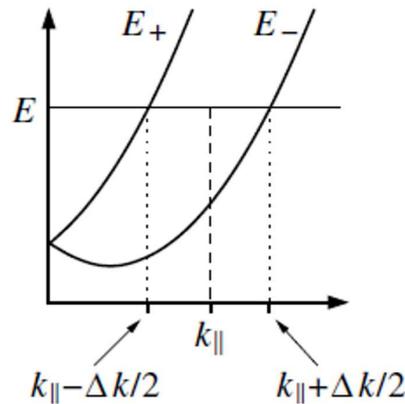
$$B_{ef} = \langle \mathbf{S} \rangle \Delta \mathbf{k}. \quad (2.20)$$



**Figura 2.3:** Esquema de la energía de dispersión. Las flechas verdes indican la orientación del espín, mientras que las flechas rojas indican la dirección del campo magnético efectivo, para el caso de una interacción espín órbita tipo Rashba [3].

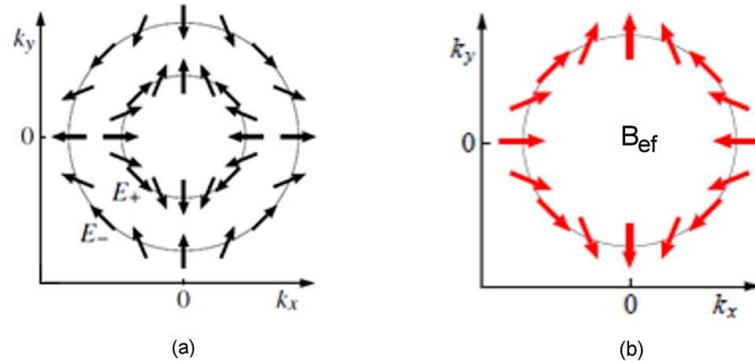
La definición de  $\Delta\mathbf{k}$  está ilustrada en la Figura 2.4, la cual muestra la energía en el plano del vector de onda  $\mathbf{k}_{\parallel}$ . En dicha imagen se puede observar que  $E = E_+(\mathbf{k}_{\parallel} - \Delta\mathbf{k}/2) = E_-(\mathbf{k}_{\parallel} + \Delta\mathbf{k}/2)$ , donde los signos  $\pm$  denotan las bandas de energía superior e inferior [3]. El campo magnético efectivo cumple con la siguiente relación:

$$B_{ef} = \langle \mathbf{S} \rangle_+ \Delta\mathbf{k} = -\langle \mathbf{S} \rangle_- \Delta\mathbf{k}. \quad (2.21)$$



**Figura 2.4:** Esquema de la energía en la plano del vector de onda  $\mathbf{k}$  [3].

El comportamiento del campo magnético efectivo tanto para la inversión asimétrica del bulto así como para inversión asimétrica estructural se puede observar en las Figuras 2.3 y 2.5. Para el primer caso se muestra que el campo efectivo es anisotrópico, es decir tiene una dependencia con el vector de onda  $\mathbf{k}$ . En el segundo caso no existe dependencia de  $\mathbf{k}$  [3].



**Figura 2.5:** Comportamiento del campo efectivo y del espín para un sistema con inversión asimétrica de bulto en dos dimensiones y confinado a [001]. (a) Muestra el comportamiento del espín en el plano del vector de onda  $k$ . (b) Muestra el comportamiento del campo magnético efectivo [3].

Entre una de las aplicaciones del acoplamiento espín-órbita Rashba y Dresselhaus se encuentra la elaboración de filtros de espín. Hatano y colaboradores [15], proponen un sistema constituido por un material (de geometría cuadrada) susceptible de experimentar asimetría estructural, es decir con interacción espín-órbita Rashba, el cual es penetrado por un campo magnético. Para este sistema calcularon las condiciones necesarias para lograr un filtro de espín. Un trabajo más reciente [16], propone un filtro de espín basado en el interferómetro electrónico Mach-Zehnder [25], con una representación dentro de la teoría de calibre de Yang-Mills, en este caso  $SU(2) \times U(1)$ .

## 2.5. Corriente de Espín

Al aplicar un campo eléctrico externo en un semiconductor con acoplamiento espín-órbita se puede generar un transporte de espín en una dirección perpendicular y acumulación de espín en las fronteras laterales de la muestra y en ausencia de campo magnético

externo. Esto es conocido como efecto Hall de espín [2]. Para sistemas con interacción espín-órbita como los mencionados en la sección anterior la corriente de espín se puede expresar como [12]:

$$j_k^i = \frac{1}{2} \langle v_k \sigma_i + \sigma_i v_k \rangle, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \partial H / \partial \mathbf{k}$  es la velocidad de la partícula. La definición (2.22) presenta ciertas desventajas para describir de una forma apropiada el transporte de espín. Se sabe que en el equilibrio  $j_k^i \neq 0$  con interacción espín-órbita y sin ella  $j_k^i = 0$ , es decir que la corriente de espín no es conservada en la interfase. Dicha expresión es invariante bajo transformaciones temporales.

Se sabe que para un sistema con interacción espín-órbita, el espín es no conservado y esto causa problemas para describir el transporte de espín en términos de la corriente de espín. La derivada del tiempo de la densidad de espín  $S$  no puede ser representada como la divergencia de la corriente de espín, ya que se tienen términos de torque [12]:

$$\frac{\partial S^i}{\partial t} + \nabla_k J_k^i = \tau^i,$$

donde  $\tau^i$  es un torque debido al campo magnético efectivo. La densidad de espín para una partícula en un estado  $\Psi$  es definida como:  $S^i = \Psi^\dagger \hat{s}^i \Psi$ , donde  $\hat{s}^i$  es el operador de espín. En el trabajo de Tokatly [14], se discute el equilibrio de la corriente. La corriente de espín está relacionada con el campo no Abelian de Yang-Mills; La teoría de calibre no Abeliana será explicada en la próxima sección. En [14] proponen que la corriente de espín para el acoplamiento espín-órbita será:

$$J_k = \lambda D_k F_{kj} = \lambda (\partial_k F_{kj} - i[A_k, F_{kj}]) \quad (2.23)$$

donde  $\lambda$  es una constante,  $D_k$  es la derivada covariante,  $F_{kj}$  es el campo de fuerza y  $A_k$  es el campo de calibre correspondiente a la interacción espín-órbita. Para un sistema en dos dimensiones y con interacción espín-órbita Rashba y Dresselhaus la corriente de espín se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J_x^y &= -J_y^x = \frac{m^2}{6\pi} \alpha(\alpha^2 - \beta^2), \\ J_x^x &= -J_y^y = \frac{m^2}{6\pi} \beta(\alpha^2 - \beta^2), \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde  $m$  es la masa,  $\alpha$  y  $\beta$  son las constantes de acoplamiento Rashba y Dresselhaus respectivamente. Para el caso particular en que  $\alpha = \pm\beta$ , se observa que la corriente se anula, es decir, ésta es una manifestación de la relevancia de las características no abelianas del transporte de espín.

# Capítulo 3

## Fases Topológicas y Teoría de Calibre No Abelianas

En esta sección se discuten las fases topológicas debido al efecto Aharonov-Bohm y al efecto Aharonov-Casher. Para el primer caso se muestra el comportamiento de una partícula cargada en una región donde no existen fuerzas y la cual es afectada por un potencial electromagnético. Si se considera que la trayectoria de la partícula cargada encierra un solenoide, el cual contiene un flujo magnético, la función de onda de la partícula adquiere un factor de fase el cual es proporcional al flujo magnético. Esta fase sólo depende de la topología del espacio. El espacio en presencia del solenoide es no simple conectado, es decir que no todas las curvas cerradas pueden ser reducidas continuamente a un punto. El efecto Aharonov-Casher sigue una idea similar al efecto Aharonov-Bohm, pero con la diferencia que la partícula es neutra y tiene un momento magnético dipolar. La trayectoria de ésta encierra una línea de carga y la fase debido a este efecto también depende de la topología del espacio.

### 3.1. Efecto Aharonov-Bohm

Es un fenómeno cuántico, que se observa en partículas cargadas, y el cual fue estudiado en 1959 por Yakir Aharonov, físico israelí y David Bohm, físico estadounidense.

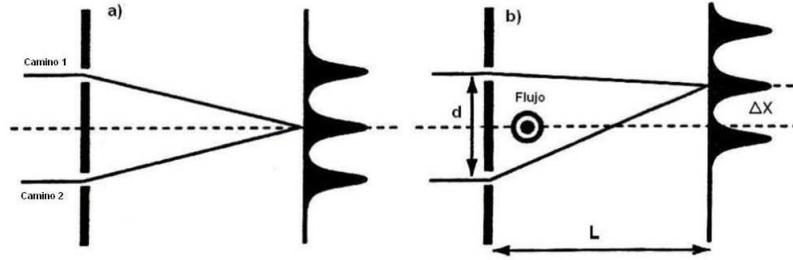
Para explicar dicho fenómeno consideremos el experimento de doble rendija, Figura 3.1(a), donde es inyectado un haz de electrones, lo cual genera un patrón de interferencia característico. En este caso el patrón de interferencia se deberá a la superposición de las funciones de onda asociadas a los distintos caminos [19]:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (3.1)$$

donde  $\Psi_1$  es la función de onda del electrón al seguir el camino uno, y  $\Psi_2$  es debido al camino dos.

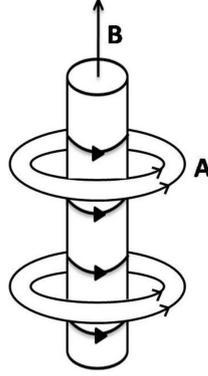
Ahora colocamos un pequeño solenoide, de tal forma que sólo exista un flujo magnético  $\phi_B$  en el interior de éste, Figura 3.1(b). El potencial  $\mathbf{A}$  se puede expresar de la siguiente forma en coordenadas cilíndricas [18]:

$$A = \begin{cases} A_r = A_z = 0 & A_\phi = \frac{B_0 r}{2} & \text{en el interior del solenoide} \\ A_r = A_z = 0 & A_\phi = \frac{B_0 R^2}{2r} & \text{en el exterior del solenoide} \end{cases} \quad (3.2)$$



**Figura 3.1:** Experimento de doble rendija. (a) Muestra el experimento de doble rendija ausente de flujo magnético. (b) Se observa un corrimiento del patrón característico, debido a la presencia de un flujo magnético en el experimento de doble rendija [20].

donde  $R$  es el radio del solenoide y  $B_0$  es el campo magnético. Dado que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , se garantiza con la expresión (3.2) que sólo exista campo magnético en el interior del solenoide, (Figura 3.2), es decir:



**Figura 3.2:** Forma de A y B en el solenoide.[18]

$$B = \begin{cases} B_r = B_\phi = 0 & B_z = B_0 & \text{en el interior del solenoide} \\ B_r = B_\phi = B_z = 0 & & \text{en el exterior del solenoide} \end{cases} \quad (3.3)$$

En presencia del campo magnético, las transformaciones sobre la función de onda tienen la siguiente forma:

$$\psi(\mathbf{r})' = e^{\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}} \psi. \quad (3.4)$$

Donde el término de la exponencial representa el factor de fase que adquiere el electrón. El patrón de interferencia al introducir el solenoide se expresa ahora como:

$$\begin{aligned} \Psi_D = & \Psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}} + \Psi_2 e^{\frac{ie}{\hbar} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}} \\ & (\Psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar} \int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}} + \Psi_2) e^{\frac{ie}{\hbar} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando el teorema de Stokes, la expresión (3.5) se puede escribir como:

$$\Psi_D = (\Psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar} \phi_B} + \Psi_2) e^{\frac{ie}{\hbar} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}, \quad (3.6)$$

donde  $\frac{e}{\hbar}\phi_B$  es la fase Aharonov-Bohm. El flujo causa un cambio relativo en la fase entre  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  y esto trae como consecuencia un corrimiento en el patrón de interferencia donde  $\Delta x = (L\lambda e/2\pi d\hbar)\phi_B$ .

Debido a que el potencial cumple con las siguientes transformaciones  $\mathbf{A}_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda$  y  $\Psi$  es considerada como una función escalar continua, se tendrá el mismo comportamiento físico tanto para un potencial  $A_\mu$  como para  $A'_\mu$ . Aharonov y Bohm en su trabajo destacan que  $A_\mu$  toma el atributo de una variable física que permite diferenciar entre dos estados cuánticos, los cuales difieren sólo por las transformaciones de calibre [21]. La fase Aharonov-Bohm tiene un carácter topológico ya que no depende de la geometría del camino. En 1960 Chambers demostró experimentalmente este fenómeno mediante el uso de un interferómetro constituido por biprismas [22].

### 3.2. Efecto Aharonov-Casher

Es un fenómeno análogo al descrito a la sección anterior, pero éste se manifiesta en partículas neutras con momento magnético. Para explicar dicho fenómeno de forma clásica consideremos un sistema constituido por una línea de carga, la cual tiene una carga por unidad de longitud  $\lambda$ . Una partícula neutra se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  y con un momento dipolar  $\boldsymbol{\mu}$  alrededor de dicha línea de carga, y se considera al momento dipolar paralelo a la línea de carga [23]. El Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}, \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico y  $m$  es la masa de la partícula. Se tiene que:

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu} = e \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\mu}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} = e\mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el potencial vector en el punto  $\mathbf{r}$  y cuya fuente es un momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  en  $\mathbf{R}$ . Se cumple que  $E = -\nabla A_0$  y en este caso se considera  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (calibre de Coulomb). La fase correspondiente es expresada como:

$$\phi_{AC} = \oint_c \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \mu\lambda, \quad (3.9)$$

donde  $\lambda$  es la carga por unidad de longitud. Este efecto fue probado experimentalmente por Cimmino et al, en 1989, mediante un interferómetro de neutrones [24]. Al igual que el caso anterior la fase Aharonov-Casher se considera una fase topológica ya que no depende de la geometría del camino.

El efecto Aharonov-Casher se manifiesta también en partículas con espín. El Hamiltoniano para una partícula neutra con un momento dipolar y en un campo eléctrico externo es:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}) - \frac{\mu^2 E^2}{2m}, \quad (3.10)$$

donde  $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{\sigma}$ . La fase será expresada como:

$$\phi_{AC} = \oint_c \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{R} \quad (3.11)$$

### 3.3. Teoría de Calibre No Abeliana $SU(2)$ (Yang-Mills)

La invariancia de calibre fue introducida por Hermann Weyl, matemático alemán, cuando trataba de incorporar al electromagnetismo dentro de una descripción geométrica incluyendo la idea de transformaciones escalares.

Para explicar la invariancia de calibre consideremos el siguiente Lagrangiano que describe el campo de una partícula cargada:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (3.12)$$

donde el campo escalar  $\phi$  tiene dos componentes reales  $\phi_1$  y  $\phi_2$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (3.13)$$

$$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (3.14)$$

El Lagrangiano (3.12), es invariante bajo transformaciones globales:

$$\phi \longrightarrow e^{-\Lambda}\phi \quad \phi^\dagger \longrightarrow e^{\Lambda}\phi^\dagger, \quad (3.15)$$

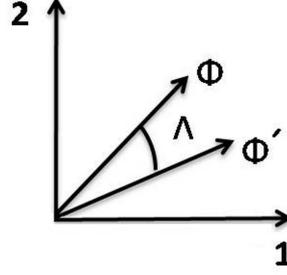
donde  $\Lambda$  es una constante real. Las transformaciones anteriores no tienen dependencia alguna con el espacio-tiempo. En este caso se puede comprobar fácilmente que  $\delta\mathcal{L} = -ie\Lambda\partial_\mu J^\mu = 0$ , donde  $J^\mu = (\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)$  es la corriente y cumple con la condición  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Para darle una interpretación geométrica a las transformaciones (3.15), se expresa  $\phi = \mathbf{i}\phi_1 + \mathbf{j}\phi_2$  como un vector espacial de dos dimensiones, en una base ortogonal [18]. Las ecuaciones (3.15) pueden ser escritas como:

$$\phi'_1 + i\phi'_2 = e^{-\Lambda}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi'_1 - i\phi'_2 = e^{\Lambda}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (3.16)$$

De las expresiones anteriores se obtiene:

$$\phi'_1 = \phi_1 \cos \Lambda + \phi_2 \sin \Lambda, \quad \phi'_2 = -\phi_1 \sin \Lambda + \phi_2 \cos \Lambda. \quad (3.17)$$

Estas son rotaciones en el plano (1,2) del vector  $\phi$  con un ángulo  $\Lambda$ , (Figura 3.3). Dichas rotaciones en dos dimensiones están dentro del grupo  $SO(2)$ . Debido a que las transformaciones tienen una representación equivalente como  $e^{i\Lambda}$ , es decir matrices unitarias de una dimensión  $e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda} = 1$ , también las transformaciones están representadas por el grupo  $U(1)$ . Las transformaciones de calibre son las mismas para todos los puntos del espacio-tiempo, debido a que  $\Lambda$  es una constante. Esto es conocido como transformación de calibre global.



**Figura 3.3:** Rotation del campo  $\phi$  [18].

Si  $\Lambda(x^\mu)$  es una función arbitraria dependiente del espacio-tiempo, las transformaciones serán diferentes para cada punto. Estas son llamadas transformaciones de calibre locales. Para este caso el Lagrangiano (3.12) no es invariante bajo dichas transformaciones, ya que se obtiene un término extra  $\partial_\mu \phi' \rightarrow (-\partial_\mu \Lambda)e^{-i\Lambda}\phi + e^{-i\Lambda}(\partial_\mu \phi)$ . Ahora, la variación del Lagrangiano (3.12) tiene la siguiente forma:

$$\delta\mathcal{L} = -i\Lambda\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi \right) - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_{m\mu}\Lambda)\phi + (\phi \rightarrow \phi^*). \quad (3.18)$$

El primer término desaparece ya que la corriente  $J^\mu$  cumple con la condición  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . La expresión anterior toma la forma:

$$\delta\mathcal{L} = i\partial_\mu\Lambda(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) = iJ^\mu\partial_\mu\Lambda. \quad (3.19)$$

Se introduce un término al Lagrangiano (3.12)  $\mathcal{L}_0 = -eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi$  donde  $e$  es una constante de acoplamiento, que en este caso representa la carga de la partícula y  $A_\mu$  es un cuadri-vector que bajo transformaciones de calibre debe cumplir:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda. \quad (3.20)$$

La variación sobre el término extra es:  $\delta\mathcal{L}_0 = -eJ^\mu\partial_\mu\Lambda$ . Entonces  $\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_0 = 0$  así que el Lagrangiano total es invariante y toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi^\dagger \phi - ie(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger)A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^*. \quad (3.21)$$

El término de la forma  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  es incorporado al Lagrangiano debido a la contribución del campo  $A_\mu$ , y  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  (caso Abelian). Entonces el Lagrangiano total queda expresado como:

$$\mathcal{L}_{total} = (\partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi)(\partial_\mu \phi^\dagger + ieA_\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

el término  $F_{\mu\nu}$  es el tensor del campo eléctrico y la derivada  $\partial_\mu$  es reemplazada ahora por la derivada covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (3.23)$$

Consideremos ahora las siguientes transformaciones locales en  $SU(2)$ , las cuales están dentro de la teoría de calibre no Abelian:

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Lambda}(x)}\Psi = S(x)\Psi, \quad (3.24)$$

donde  $\Psi$  es un espinor,  $S(x)$  es una matriz  $2 \times 2$ , y  $\boldsymbol{\sigma}$  representan las matrices de Pauli. En este caso el Lagrangiano no es invariante bajo estas transformaciones locales, ya que  $\partial_\mu \Psi' = (\partial_\mu S)\Psi + S(\partial_\mu \Psi)$ . La derivada covariante tendrá la siguiente forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}_\mu. \quad (3.25)$$

Se define  $\hat{A}_\mu = M^a A_\mu^a$ , donde el índice  $a = 1, 2, 3$  y  $M^a$  en general son tres matrices  $n \times n$ , las cuales representan los generadores y deben cumplir con  $[M^i, M^j] = i\varepsilon^{ijk}M^k$ . En este caso  $M^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ . Entonces la expresión (3.25) toma la siguiente forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu, \quad (3.26)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento. El Lagrangiano será invariante si imponemos la siguiente ley de transformación sobre la derivada covariante:

$$D_\mu \Psi \longrightarrow D'_\mu \Psi' = S D_\mu \Psi. \quad (3.27)$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$A'_\mu = A_\mu - \Lambda \times A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda. \quad (3.28)$$

Por último la curvatura del campo de calibre está definida como:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (3.29)$$

Para el caso Abeliano el último término es igual a cero. Yang y Mills en 1954 desarrollaron la teoría para el isospín en el caso de una simetría local. Ésta es de utilidad para la descripción de la interacción fuerte entre quarks y la unificación entre la interacción débil y el electromagnetismo.

La interacción espín-órbita se puede representar como una teoría de calibre  $SU(2) \times U(1)$ , es decir en una formulación no Abeliana del campo de calibre. Consideramos un sistema constituido por un cuadrado  $l \times l$ , el cual posee en sus brazos interacción espín-órbita Rashba y el interior de éste es penetrado por un campo magnético  $\phi_B$  [15]. El Hamiltoniano para este caso se expresa como:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + \alpha(\Pi_x \sigma_y - \Pi_y \sigma_x) \\ &= \frac{1}{2m} [(P_x - eA_x + \theta_R \frac{\hbar}{2} \sigma_y)^2 + (P_y - eA_y - \theta_R \frac{\hbar}{2} \sigma_x) + const, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{P} - e\mathbf{A})$  y  $\theta_R = \frac{2m\alpha}{\hbar}$ . La expresión (3.30) posee la forma del Hamiltoniano de Yang-Mills, es por ello que el campo físico está dado por la expresión (3.29):

$$\tilde{F} = \frac{e\phi_B}{\tilde{e}S} + \frac{\theta_R\phi_R}{\tilde{e}S}. \quad (3.31)$$

En la ecuación anterior  $\tilde{e}$  es una constante de acoplamiento,  $S$  es el área del cuadrado y  $\phi_R = \pm\theta_R l^2 \frac{\hbar}{2}$ . El primer término de la expresión (3.31) es debido a la presencia del flujo magnético, lo cual genera una fase tipo Aharonov-Bohm donde  $e$  es la carga de la partícula. El segundo término es debido a la no conmutatividad del campo de calibre de Yang-Mills. En este caso  $\theta_R$  juega el papel de la carga para la interacción espín-órbita, y debido a la presencia de un flujo eléctrico se genera la fase Aharonov-Casher. Se sabe que la interacción espín-órbita, Rashba es generada por un campo eléctrico externo, mientras que Dresselhaus es producido por el campo eléctrico del cristal. Entonces una partícula en presencia de un flujo magnético y con interacción espín-órbita adquiere una fase debido al efecto Aharonov-Bohm y otra debido a Aharonov-Casher, y esta última es independiente de la carga de la partícula.

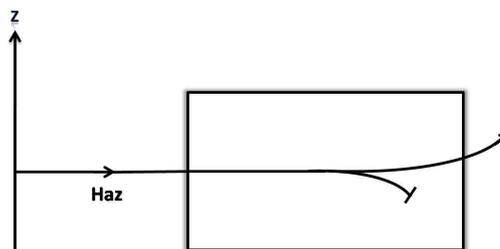
# Capítulo 4

## Interferómetro Electrónico y Filtro de Espín

### 4.1. Estado Puro de Espín

Se dice que un sistema se encuentra en un estado puro cuando éste puede ser representado por un único ket  $|\chi\rangle$  [17].

Un ejemplo de un sistema puro es considerar un haz de partículas con espín  $\frac{1}{2}$ , que pasan a través de un montaje Stern-Gerlach. Las partículas serán orientadas con respecto al eje  $z$ , obteniendo dos proyecciones del haz. En este caso se tiene que  $m = \pm\frac{1}{2}$ . Consideremos ahora que la proyección correspondiente a  $m = -1/2$  es filtrada, (Figura 4.1), todas las partículas del haz estarán en un estado idéntico, con el mismo número cuántico  $m$ , es decir todas las partículas tendrán espín para arriba con respecto al eje  $z$ , y dicho estado será descrito con  $|\chi\rangle = |+\rangle$ . En este caso se dice que el sistema se encuentra en un estado puro [17].



**Figura 4.1:** Se filtra la proyección del haz con  $m = -1/2$  en el montaje de Stern-Gerlach [17].

De forma más general un estado puro puede ser expresado como una superposición lineal de los estados  $|\pm\rangle$ , es decir:

$$|\chi\rangle = a_1 |+\rangle + a_2 |-\rangle, \quad (4.1)$$

Donde  $a_1$  y  $a_2$  son las amplitudes de probabilidad,  $|+\rangle$  está referido al estado de espín para arriba, mientras que  $|-\rangle$  representa el estado de espín para abajo. Una representación equivalente a la expresión (4.1) es:

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

El estado  $|\chi\rangle$  está normalizado ya que  $\langle\chi|\chi\rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ . Un estado puro está caracterizado por una dirección específica en la cual apuntan los espines.

Una herramienta útil para analizar un estado puro es el vector polarización  $\mathbf{P}$  [17], el cual es definido como los valores de expectación de las matrices de Pauli:

$$P_i = \langle\sigma_i\rangle = \langle\chi|\sigma_i|\chi\rangle, \quad (4.3)$$

donde  $\sigma_i$  está representada por la expresión (2.2). El vector polarización para un estado puro tiene magnitud unitaria, es decir:

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = 1, \quad (4.4)$$

donde  $P_i$  ( $i = x, y, z$ ) son las componentes del vector polarización. Al considerar un haz de partículas en un estado puro  $|+\rangle$ , por ejemplo, las componentes del vector polarización son:

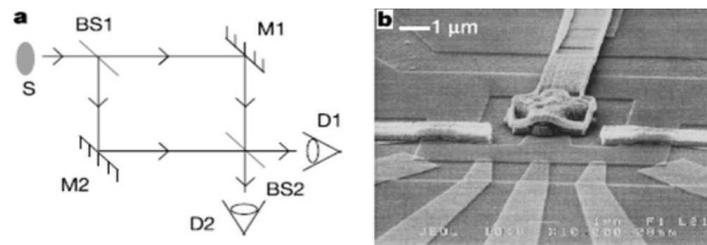
$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = 1, \quad (4.5)$$

esto implica que el vector polarización apunta en la dirección  $+z$ . Para el estado  $|-\rangle$  se obtiene que las componentes para dicho vector son:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -1. \quad (4.6)$$

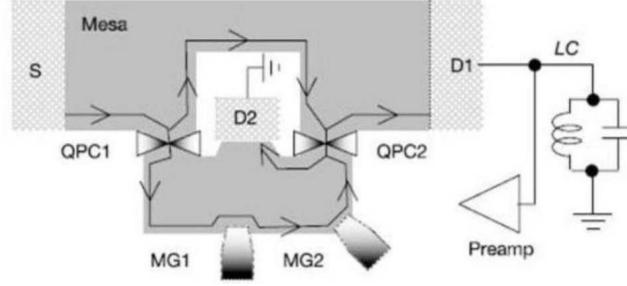
## 4.2. Interferómetro Electrónico Mach-Zehnder

El interferómetro electrónico Mach-Zehnder, es una poderosa herramienta en el estudio de ondas coherentes en sistemas mesoscópicos [25]. Este tipo de dispositivo se caracteriza por estar fabricado en gases de electrones en dos dimensiones, y pueden ser ensamblados en heteroestructuras tipo GaAs-AlGaAS.



**Figura 4.2:** (a) Interferómetro óptico Mach-Zehnder. (b) Micrografía de barrido electrónico del dispositivo [25].

Este interferómetro electrónico es análogo al interferómetro óptico. Figura 4.2(a). En el interferómetro óptico un haz monocromático proveniente de una fuente S incide sobre el beam splitter (BS1). Parte del haz es reflejada y la otra transmitida. Luego el haz es reflejado por completo por los espejos M1 y M2 y por último interfiere en el segundo beam splitter (BS2), después de lo cual es recolectado en los detectores D1 y D2. En el caso electrónico, el sistema se encuentra en presencia de un campo magnético, el cual es utilizado para manipular la señal a la salida.



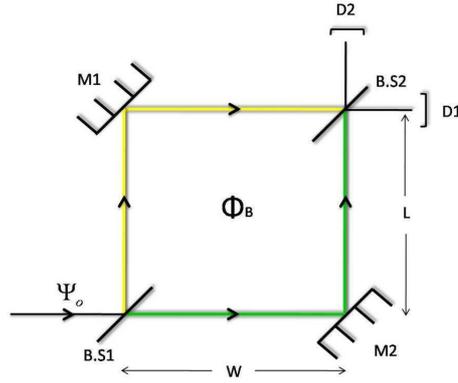
**Figura 4.3:** Interferómetro electrónico Mach-Zehnder [25].

Adicionalmente, debemos indicar que en el caso del interferómetro electrónico los puntos de contactos cuánticos (QPC) cumplen con la función de los beam splitters, (Figura 4.3). Los coeficientes de transmisión en cada detector están relacionados con la fase Aharonov-Bohm. Este dispositivo tiene la ventaja de funcionar con campos magnéticos altos, y además se pueden estudiar partículas con cargas fraccionarias. Una ventaja adicional de esta configuración es que, mediante la aplicación de voltajes de compuerta, se puede modular la señal de interferencia a la salida. Esto es debido a que al aplicar dichos voltajes en los puntos indicados en la figura como  $MG1$  y  $MG2$ , se logra manipular el área efectiva del dispositivo, y por ende el flujo magnético.

### 4.3. Filtro de Espín: Interferómetro de Brazos Asimétricos

Para realizar una extensión del caso anterior para el transporte electrónico en el régimen no Abelianiano, consideremos un sistema como el mostrado en la Figura 4.4, el cual está basado en el interferómetro electrónico Mach-Zehnder [25]. Este es un rectángulo, de longitudes  $L$  y  $W$  que posee interacción espín-órbita tipo Rashba y Dresselhaus en sus brazos. También se caracteriza por estar en presencia de un flujo magnético externo  $\phi_B$ , sólo en el interior del rectángulo. Considerando las expresiones (2.18) y (2.17) el Hamiltoniano para este sistema puede escribirse como:

$$H = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m^*} + V + \alpha(\Pi_x\sigma^y - \Pi_y\sigma^x) + \beta(\Pi_y\sigma^y - \Pi_x\sigma^x). \quad (4.7)$$



**Figura 4.4:** Interferómetro electrónico. Los brazos del sistema poseen interacción espín-órbita y existe un flujo magnético  $\phi_B$  sólo en el interior del rectángulo. Los caminos uno y dos están señalados por las líneas amarillas y verdes respectivamente.

Donde  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$ ,  $m^*$  es la masa efectiva del electrón y  $V$  es un potencial periódico. No se considera el término correspondiente a Zeeman porque el campo magnético se encuentra restringido al interior del rectángulo. El Hamiltoniano (4.7) será reescrito de la siguiente forma:

$$H = \frac{(\mathbf{P} - e\tilde{\mathbf{A}})^2}{2m^*} + V + const, \quad (4.8)$$

donde  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^B \mathbb{I} + \mathbf{A}^{SO}$ . Este campo de calibre está constituido por una parte correspondiente al vector potencial  $\mathbf{A}^B = \frac{B_0}{2}(-y, x)$  el cual tiene una representación en  $U(1)$ , y el otro término es correspondiente a la interacción espín-órbita  $\mathbf{A}^{SO} = (A_x^{SO}, A_y^{SO}) = \frac{m^*}{e}(\alpha\sigma_y - \beta\sigma_x, -\alpha\sigma_x + \beta\sigma_y)$ . Este último posee una representación en  $SU(2)$  y como se mencionó anteriormente la presencia del acoplamiento espín-órbita genera un campo no Abelian.

Mediante este interferómetro se analizarán las amplitudes, en los detectores  $D_1$  y  $D_2$ , y se encontrarán las condiciones necesarias para obtener un filtro de espín, es decir polarizar los estados de entrada a lo largo de un eje definido. En este caso consideramos un electrón que es representado por el estado puro:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Dicho electrón pasa por el primer beam splitter, el cual experimentalmente se realiza mediante los denominados “puntos cuánticos de contacto”. Estos puntos de contactos cuánticos son descritos mediante una matriz de scattering  $2 \times 2$  [26], sin embargo para este caso se tomará en cuenta una situación ideal en la cual no se considera dicha matriz de scattering. Esta aproximación será válida siempre que el transporte se realice en presencia de materiales que no mezclen los estados de espín, es decir, que no produzcan transiciones entre los estados asociados al grado de libertad interno. El haz sigue los caminos denominados uno y dos, los cuales son señalados en amarillo y verde respectivamente. El haz es reflejado por los espejos  $M_1$  y  $M_2$  y por último pasa a través del beam splitter dos, para luego recolectar la señal  $\Psi_{D_1}$  ( $\Psi_{D_2}$ ) en el detector  $D_1$  ( $D_2$ ).

Las señales obtenidas en cada detector estarán representadas por los siguientes espinores:

$$\Psi_{D_1} = \mathcal{U}_{D_1} \Psi_0, \quad (4.10)$$

$$\Psi_{D_2} = \mathcal{U}_{D_2} \Psi_0, \quad (4.11)$$

donde  $\mathcal{U}_{D_1}$  y  $\mathcal{U}_{D_2}$  son matrices  $2 \times 2$  las cuales cumplen con la siguiente relación:  $\mathcal{U}_{D_1} \mathcal{U}_{D_1}^\dagger + \mathcal{U}_{D_2} \mathcal{U}_{D_2}^\dagger = \mathbb{I}$ . Esta relación garantiza la condición de normalización, es decir:  $|\Psi_{D_1}|^2 + |\Psi_{D_2}|^2 = 1$ . Los factores de fase  $\mathcal{U}_{D_1}$  y  $\mathcal{U}_{D_2}$  vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{D_1} = & r_1 t_2 \exp\left(\frac{ie B_0}{\hbar} \frac{WL}{2}\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_x^{SO} L\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_y^{SO} W\right) \\ & + t_1 r_2 \exp\left(-\frac{ie B_0}{\hbar} \frac{WL}{2}\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_y^{SO} W\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_x^{SO} L\right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{D2} = & r_1 r_2 \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \frac{B_0}{2} WL\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_x^{SO} L\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_y^{SO} W\right) \\ & + t_1 t_2 \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \frac{B_0}{2} WL\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_y^{SO} W\right) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} A_x^{SO} L\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para simplificar las expresiones anteriores usaremos la definición del flujo magnético que es expresado como  $\phi_B = B_0 WL$  y el cuanto de flujo  $\phi_0 = \frac{h}{e}$ . Adicionalmente, se introducen las fases no Abelianas, conectadas con los coeficientes de interacción espín-órbita  $\Lambda_a$  y  $\Lambda_b$ :

$$\Lambda_a = \frac{m^* L}{\hbar} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \Lambda_b = \frac{m^* W}{\hbar} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (4.14)$$

También se define el ángulo de rotación  $\theta$ , en el espacio de parámetros, y las nuevas matrices  $\sigma$  mediante las relaciones:

$$\cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (4.15)$$

$$\sigma_a = \cos \theta \sigma_y - \sin \theta \sigma_x, \quad \sigma_b = -\cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y. \quad (4.16)$$

Las matrices  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$  son unitarias ( $\sigma_b \sigma_b^\dagger = \sigma_a \sigma_a^\dagger = \mathbb{I}$ ) y cumplen con la siguiente relación:  $\sigma_a \sigma_b = (\sigma_b \sigma_a)^* = \mathbb{I} \sin 2\theta + i \sigma_z \cos 2\theta$ . Las ecuaciones (4.12) y (4.13) pueden ser expresadas ahora como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{D1} = & r_1 t_2 \exp(\pi \varphi_B) \exp(-i \Lambda_a \sigma_a) \exp(-i \Lambda_b \sigma_b) \\ & + t_1 r_2 \exp(-\pi \varphi_B) \exp(-i \Lambda_b \sigma_b) \exp(-i \Lambda_a \sigma_a), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{D2} = & r_1 r_2 \exp(\pi \varphi_B) \exp(-i \Lambda_a \sigma_a) \exp(-i \Lambda_b \sigma_b) \\ & + t_1 t_2 \exp(-\pi \varphi_B) \exp(-i \Lambda_b \sigma_b) \exp(-i \Lambda_a \sigma_a), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde  $\varphi_B = \phi_B/\phi_0$ . Usando la relación  $\exp(\pm\gamma\sigma^n) = \cos\gamma \pm \sigma^n \sin\gamma$ , las señales a la salida de los detectores tomarán la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Psi_{D1} = & [A_+\mathbb{I}(\cos\Lambda_a \cos\Lambda_b - \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b \sin 2\theta) \\ & - i(A_+(\sigma_b \cos\Lambda_a \sin\Lambda_b + \sigma_a \cos\Lambda_b \sin\Lambda_a) + A_-\sigma_z \cos 2\theta \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b)]\Psi_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{D2} = & [B_+\mathbb{I}(\cos\Lambda_a \cos\Lambda_b - \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b \sin 2\theta) \\ & - i(B_+(\sigma_b \cos\Lambda_a \sin\Lambda_b + \sigma_a \cos\Lambda_b \sin\Lambda_a) + B_-\sigma_z \cos 2\theta \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b)]\Psi_0,\end{aligned}$$

donde  $A_\pm$  y  $B_\pm$  se definen como:

$$A_\pm = [r_1 t_2 \exp(\pi\varphi_B) \pm t_1 r_2 \exp(-\pi\varphi_B)], \quad (4.19)$$

$$B_\pm = [r_1 r_2 \exp(\pi\varphi_B) \pm t_1 t_2 \exp(-\pi\varphi_B)].$$

Los autovalores para  $\mathcal{U}_{D1}$  pueden encontrarse fácilmente, y tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\lambda_\pm^{D1} = & A_+(\cos\Lambda_a \cos\Lambda_b - \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b \sin 2\theta) \\ & \mp i \sqrt{A_+^2 (\cos^2\Lambda_a \sin^2\Lambda_b + \cos^2\Lambda_b \sin^2\Lambda_a + 2\cos\Lambda_a \cos\Lambda_b \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b \sin 2\theta) \\ & + A_-^2 \sin^2\Lambda_a \sin^2\Lambda_b \cos^2 2\theta}.\end{aligned} \quad (4.20)$$

Para  $\mathcal{U}_{D2}$  se tiene:

$$\begin{aligned}\lambda_\pm^{D2} = & B_+(\cos\Lambda_a \cos\Lambda_b - \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b \sin 2\theta) \\ & \mp i \sqrt{B_+^2 (\cos^2\Lambda_a \sin^2\Lambda_b + \cos^2\Lambda_b \sin^2\Lambda_a + 2\cos\Lambda_a \cos\Lambda_b \sin\Lambda_a \sin\Lambda_b \sin 2\theta) \\ & + B_-^2 \sin^2\Lambda_a \sin^2\Lambda_b \cos^2 2\theta}.\end{aligned} \quad (4.21)$$

Para obtener una descripción física más clara, y considerando el hecho de que experimentalmente se puede controlar la visibilidad de los puntos de contacto cuánticos, nos restringiremos al caso de beam splitters simétricos, es decir  $r_1 = r_2 = r$  y  $t_1 = t_2 = t$ , y procedemos a determinar las condiciones en que se filtra una de las componentes de espín, lo cual se consigue al anular alguno de los autovalores, por ejemplo  $\lambda_+^{D_1} = 0$ . En el primer caso que se analizará, se impone la condición  $\cos \Lambda_a = 0$ , lo cual origina que el factor de fase  $\mathcal{U}_{D_1}$  sea diagonal con respecto a los ejes originales de cuantización. En este caso el filtrado ocurre en los ejes no inclinados (non-tilted axis). El segundo caso corresponde a  $\cos \Lambda_a \neq 0$ , y se encuentran nuevos ejes donde la componente de espín para arriba es filtrada. En esta última situación el filtrado ocurre en los ejes de cuantización y es llamado ejes cuantizados inclinados (tilted quantization axes).

#### 4.3.1. Filtro de Espín en Ejes no Inclinados

Considerando primero el caso non-tilted donde se toma la condición  $\cos \Lambda_a = 0$ , lo que implica que  $\Lambda_a = (2l+1)\frac{\pi}{2}$  donde  $l$  es un número entero. Para filtrar la componente de espín para arriba del espinor a la salida del detector  $D_1$  se considera la expresión (4.20), y se impone que  $\lambda_+^{D_1} = 0$ .

Tomando en cuenta la condición sobre  $\Lambda_a$  se puede obtener que  $\Lambda_b = \eta\Lambda_a = \eta(2l+1)\frac{\pi}{2}$  donde  $\frac{W}{L} = \eta$ . El valor de  $\eta$  nos indica la razón entre las longitudes de los brazos del interferómetro. Para distintos valores de  $\eta$  se determinan las amplitudes a la salida de los detectores, para analizar así el comportamiento del interferómetro. Para realizar dicho análisis se considera que los coeficientes de reflexión y transmisión toman los siguientes valores:  $r = \frac{i}{\sqrt{2}}$  y  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Esto se conoce en la literatura óptica como espejo semitransparente (beam splitter) 50-50, debido a que transmite con la misma probabilidad con que refleja.

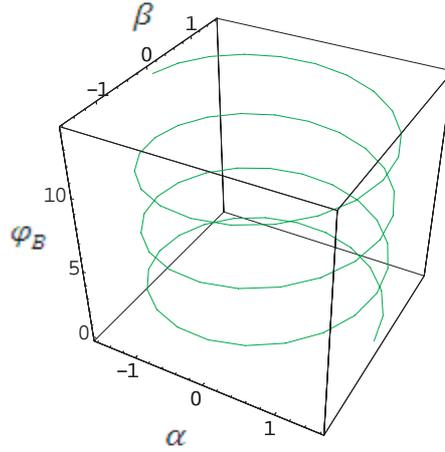
En esta sección se consideran los  $\eta = \text{impar}$ , ya que sólo este caso cumple con la condición de ejes no inclinados. Al usar expresión (4.20) y considerando  $\lambda_+^{D_1} = 0$ , se obtiene la siguiente relación:

$$\sin(\pi\varphi_B - 2\theta) = 0 \quad \pi\varphi_B - 2\theta = n\pi, \quad (4.22)$$

donde  $n$  es un número entero. Usando las expresiones (4.22), (4.14) y (4.15) determinan las relaciones entre las constantes de acoplamiento espín-órbita  $\alpha$  y  $\beta$  y el flujo magnético  $\varphi_B$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \eta \frac{\hbar}{m^*L} (2l + 1) \pi/2 \cos(\pi/2(\varphi_B - n\pi)), \\ \beta &= \eta \frac{\hbar}{m^*L} (2l + 1) \pi/2 \sin(\pi/2(\varphi_B - n\pi)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

En la Figura 4.5, se muestra la relación entre las constantes de acoplamiento  $\alpha$  y  $\beta$ , en unidades de  $\hbar/(m^*L)$ , con el flujo magnético adimensional  $\varphi_B$ , para los valores  $\eta = 1$ ,  $n = 0$  y  $l = 0$ . En este caso las soluciones son hélices, dadas por las expresiones (4.23).



**Figura 4.5:** Filtro de espín en ejes no inclinados. El gráfico muestra la relación entre  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varphi_B$ , cuando  $\eta$  es impar. La figura corresponde a  $\eta = 1$ ,  $n = 0$   $l = 0$

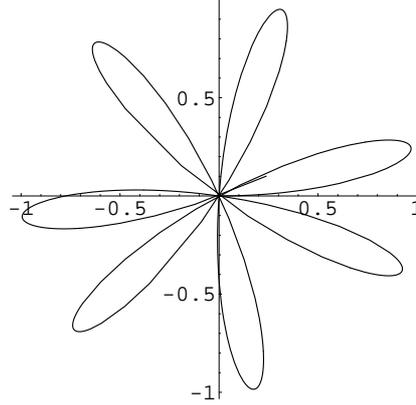
Usando la relación (4.20) se puede obtener la amplitud  $\lambda_{-}^{D_1}$  para el espínor de salida en el detector  $D_1$ . Dicho espínor será:

$$\Psi_{D_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ i(-1)^{l+1} \sin \eta \Lambda_a \sin(\pi\varphi_B + 2\theta) \Psi_- \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

donde el término que contiene la variable  $\Lambda_a$  toma los siguientes valores  $\sin \eta \Lambda_a = \pm 1$ . En la Figura 4.6 se muestra un gráfico en coordenadas polares del módulo de la amplitud como función del flujo. El espín a la salida del detector  $D_2$ , considerando las condiciones impuestas en el detector  $D_1$ , toma la siguiente forma al desarrollar los autovalores expresados en (4.21):

$$\Psi_{D_2} = \begin{pmatrix} i(-1)^{l+n} \sin \eta \Lambda_a \Psi_+ \\ i(-1)^{l+1} \sin \eta \Lambda_a \cos(\pi \varphi_B + 2\theta) \Psi_- \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Como se puede apreciar, en el detector  $D_2$  no hay filtrado, pero es posible obtener un cero en la segunda componente, si en  $D_1$  se tiene una máxima eficiencia, es decir  $\sin(\pi \varphi_B + 2\theta) = 1$ . Esta solución es un filtrado opuesto al detector  $D_1$ .



**Figura 4.6:** Filtro de espín en ejes no inclinados. Se muestra en coordenadas polares el módulo de la amplitud en función del flujo magnético  $\varphi_B$ , en el detector  $D_1$ .

### 4.3.2. Filtro de Espín en Ejes Inclinados

En este caso consideramos  $\cos \Lambda_a \neq 0$  y nuevamente queremos satisfacer la condición de filtrado para la componente de espín para arriba en el detector  $D_1$ , es decir  $\lambda_+^{D_1} = 0$ . Tomando en cuenta la relación para el filtrado y desarrollando la expresión (4.20), se llega al siguiente resultado:

$$\cos \pi \varphi_B = \sin \Lambda_a \sin \eta \Lambda_a \cos 2\theta. \quad (4.26)$$

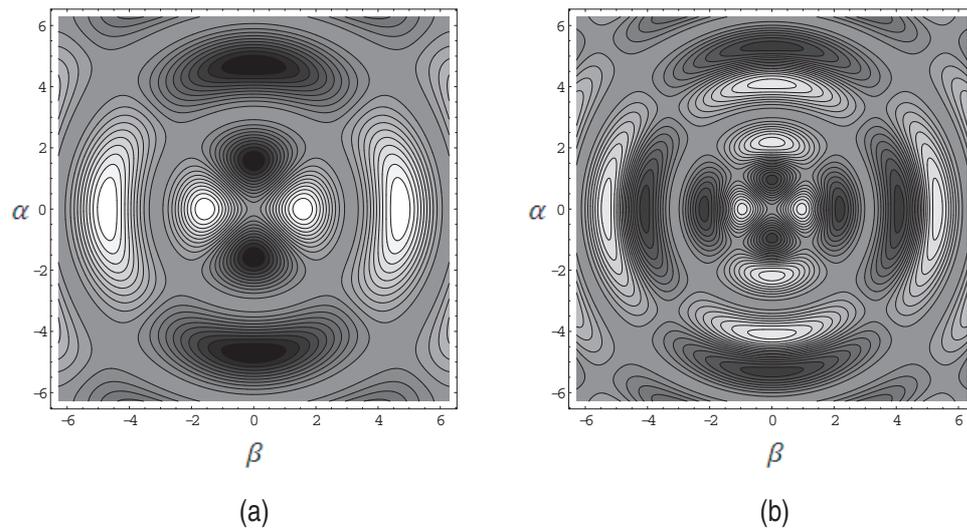
La expresión anterior nos da la relación entre las constantes de acoplamiento espín-órbita  $\alpha$ ,  $\beta$  y el flujo magnético y dicha relación nos garantiza un filtro perfecto en los ejes inclinados. En la Figuras 4.7 y 4.8 se muestra la relación entre las constantes de acoplamiento espín-órbita con el coseno del flujo magnético para distintos valores de  $\eta$ . Cada contorno corresponde a un valor del flujo  $\varphi_B$ , para determinados valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Las zonas más claras indican valores más altos del flujo magnético, para las cuales existe filtrado a la salida del detector  $D_1$ , mientras que las zonas grises representan un valor cero para el flujo.

La amplitud  $\lambda_-^{D_1}$  del espinor a la salida del detector  $D_1$  se puede calcular usando la condición de filtrado. Dicha amplitud posee la siguiente forma:

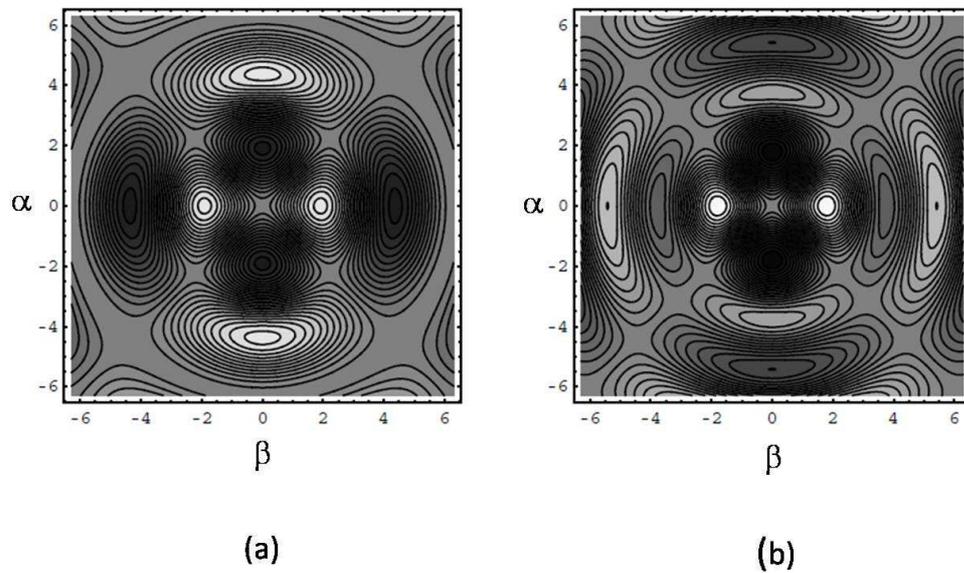
$$\lambda_-^{D_1} = 2i \cos \pi \varphi_B (\cos \Lambda_a \cos \eta \Lambda_a - \sin \Lambda_a \sin \eta \Lambda_a \sin 2\theta). \quad (4.27)$$

Usando la relación (4.26) en la expresión anterior, se calcula la probabilidad a la salida del detector  $D_1$ , y dicho comportamiento se muestra en las Figuras 4.9 y 4.10. En estas se observa el comportamiento de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  para distintos  $\eta$ . Las zonas claras indican una alta probabilidad para lograr filtrar a la salida.

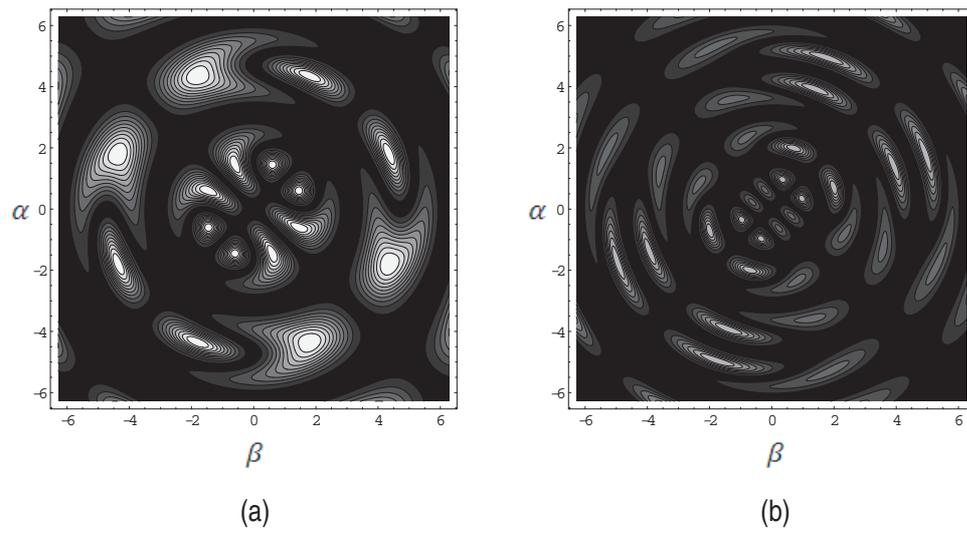
Para estudiar el comportamiento a la salida del detector  $D_2$  se analiza la probabilidad en dicho detector, y para ello se usan las expresiones (4.21) y (4.26), para realizar los cálculos correspondientes. En las Figuras 4.11-4.14 se presentan algunas gráficas correspondiente a la probabilidad en dicho detector para diferentes valores de  $\eta$ .



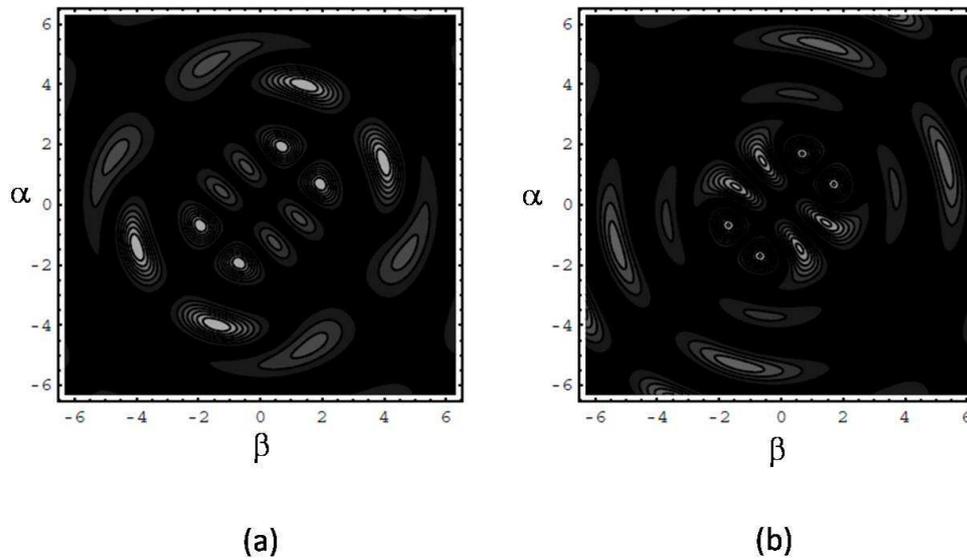
**Figura 4.7:** Filtro de espín en ejes inclinados. Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$  con el  $\cos \pi \varphi_B$ . Las zonas claras indican altos valores para el flujo magnético, para el cual ocurre filtrado. (a) Corresponde a  $\eta = 1$  (b) corresponde a  $\eta = 2$



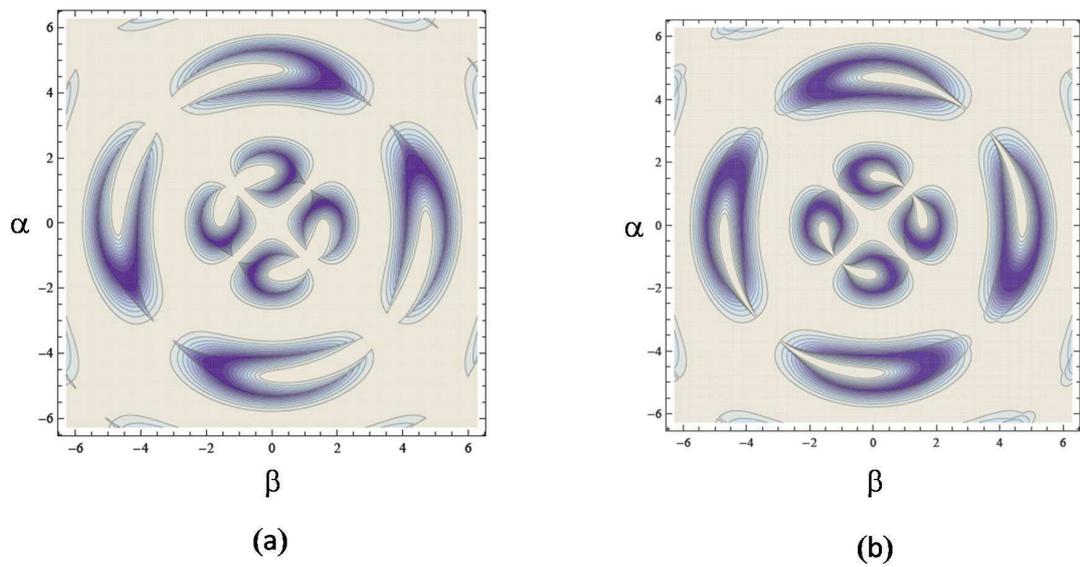
**Figura 4.8:** Filtro de espín en ejes inclinados. Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$  con el  $\cos \pi \varphi_B$ . Las zonas claras indican altos valores para el flujo magnético, para el cual ocurre filtrado. (a) Corresponde a  $\eta = 1/2$  (b) corresponde a  $\eta = 1/\sqrt{2}$



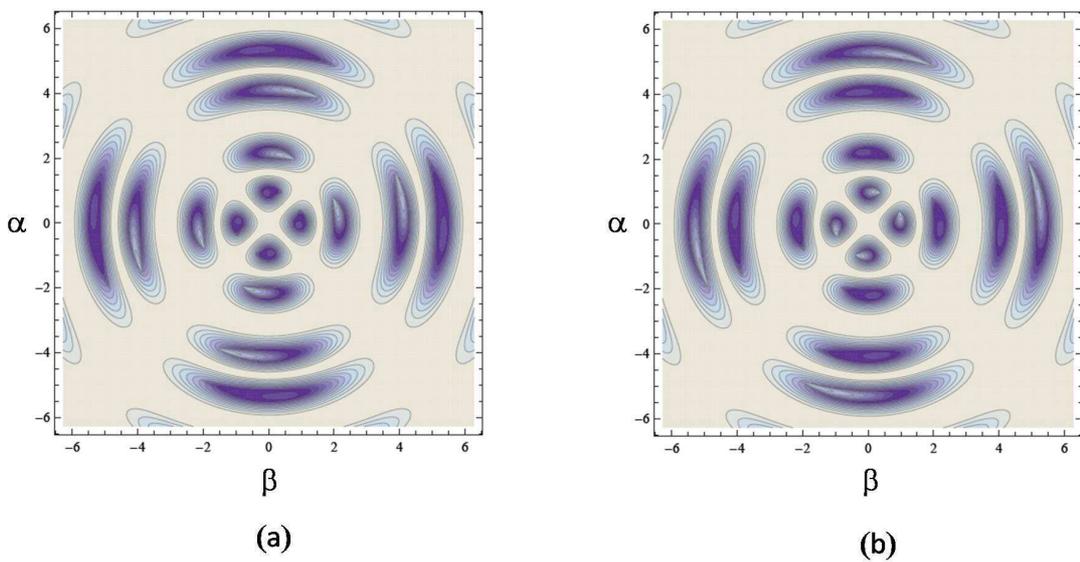
**Figura 4.9:** Filtro de espín en ejes inclinados. Probabilidad en la salida del detector  $D_1$ . Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Las zonas claras indican mayor probabilidad para filtrar a la salida. (a) Corresponde a  $\eta = 1$  (b) corresponde a  $\eta = 2$



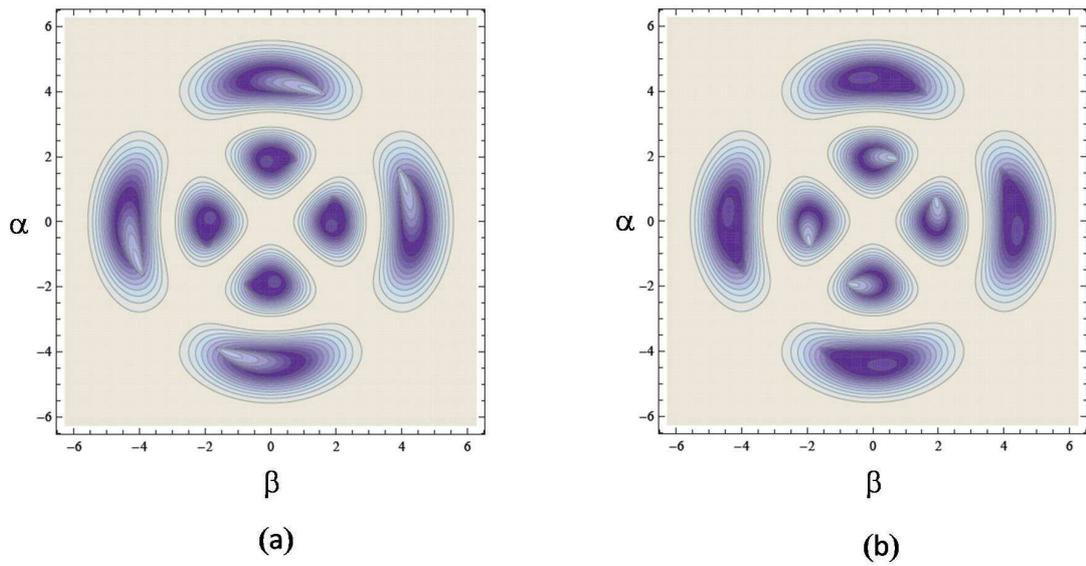
**Figura 4.10:** Filtro de espín en ejes inclinados. Probabilidad en la salida del detector  $D_1$ . Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , considerando. Las zonas claras indican mayor probabilidad para filtrar a la salida. (a) Corresponde a  $\eta = 1/2$  (b) corresponde a  $\eta = 1/\sqrt{2}$



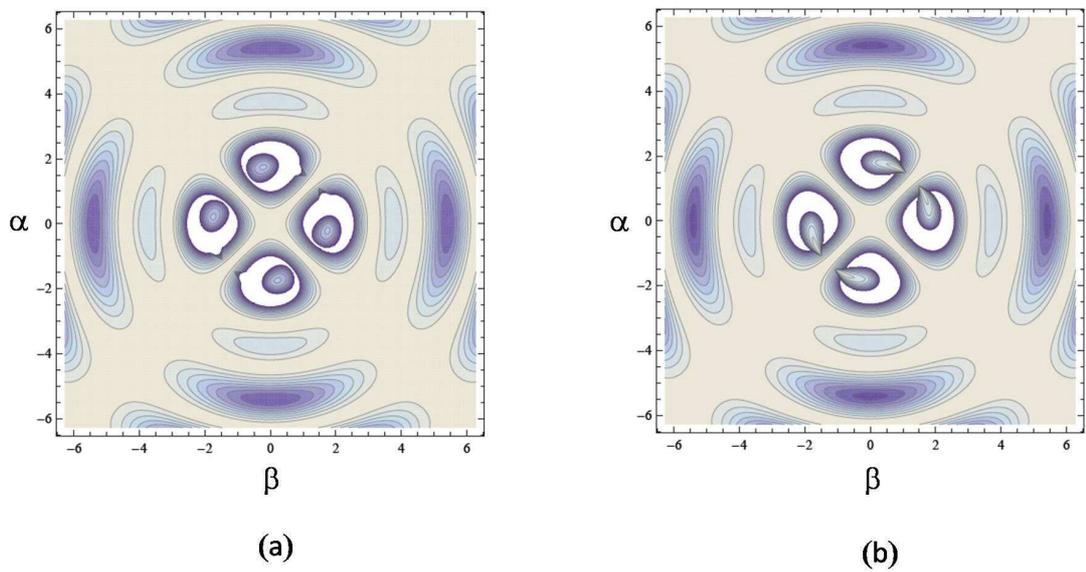
**Figura 4.11:** Filtro de espín en ejes inclinados. Probabilidad en la salida del detector  $D_2$  para  $\eta = 1$ . Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Las zonas oscuras de color indican menor probabilidad para filtrar a la salida. (a) Probabilidad de la componente de espín para arriba (b) Probabilidad de la componente de espín para abajo



**Figura 4.12:** Filtro de espín en ejes inclinados. Probabilidad en la salida del detector  $D_2$  para  $\eta = 2$ . Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Las zonas de color oscuras indican menor probabilidad para filtrar a la salida. (a) Probabilidad de la componente de espín para arriba (b) Probabilidad de la componente de espín para abajo



**Figura 4.13:** Filtro de espín en ejes inclinados. Probabilidad en la salida del detector  $D_2$  para  $\eta = 1/2$ . Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Las zonas de color oscuras indican menor probabilidad para filtrar a la salida. (a) Probabilidad de la componente de espín para arriba (b) Probabilidad de la componente de espín para abajo



**Figura 4.14:** Filtro de espín en ejes inclinados. Probabilidad en la salida del detector  $D_2$  para  $\eta = 1/\sqrt{2}$ . Muestra la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Las zonas de color oscuras indican menor probabilidad para filtrar a la salida. (a) Probabilidad de la componente de espín para arriba (b) Probabilidad de la componente de espín para abajo

# Capítulo 5

## Interferómetro y Matriz Densidad

### 5.1. Estados Mezclados de Espín

Los estados puros no son la forma más general en la que se puede encontrar un conjunto de partículas. Se dice que un estado es mezclado cuando no puede ser representado por un estado  $|\chi\rangle$ . Tanto a los estados puros como a los estados mezclados se les puede asociar una determinada matriz densidad, la cual contiene toda la información disponible del sistema [17].

Un estado mezclado no puede ser representado como una superposición de los estados  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ . Se define el operador densidad  $\rho$  como:

$$\rho = \sum_i c_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i|, \quad (5.1)$$

donde  $c_i$  es la probabilidad de encontrar a la partícula en el estado  $|\chi_i\rangle$ . La matriz densidad cumple con las siguientes condiciones:

$$\sum_n \rho_{nn} = \text{Tr}\rho = 1, \quad (5.2)$$

$$\rho^2 \neq \rho, \quad (5.3)$$

$$\text{Tr}\rho^2 \leq 1, \quad (5.4)$$

$$\rho^\dagger = \rho, \quad (5.5)$$

Los elementos diagonales de la matriz densidad  $\langle \chi_i | \rho | \chi_i \rangle$  indican la probabilidad de encontrar a una partícula en el estado  $| \chi_i \rangle$ . La sumatoria de los elementos de la diagonal nos da la probabilidad total, Ec. (5.2), mientras que la magnitud del vector polarización está entre  $0 \leq | P | \leq 1$ . El máximo valor es  $| P | = 1$ , sólo si el haz está en un estado puro, y recibe el nombre de estado completamente polarizado. Si  $| P | = 0$  entonces se tiene un estado despolarizado, mientras que si  $| P | < 1$  el estado es llamado polarizado.

Las componentes  $P_i$  del vector polarización pueden ser calculadas mediante la siguiente relación:

$$tr(\rho\sigma_i) = P_i. \quad (5.6)$$

En el caso particular de tener un estado  $| \pm \rangle$ , se puede obtener una nueva representación de  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{2}[\mathbb{I} + P_i\sigma_i], \quad (5.7)$$

Donde  $\mathbb{I}$  representa la matriz identidad. Usando la relación (5.7), se puede obtener que la traza de  $\rho^2$  es:

$$tr(\rho^2) = \frac{1}{2}(1 + | P |^2). \quad (5.8)$$

Sólo para el caso particular de un estado puro  $| P | = 1$  se tiene que

$$\rho^2 = \rho, \quad (5.9)$$

$$\text{Tr} \rho^2 = 1. \quad (5.10)$$

Se sabe que la entropía de von Neumann está referida a sistemas cuánticos. La entropía de un estado describe un sistema físico que es una expresión cuantitativa de la incertidumbre; esta incertidumbre está conectada a un sistema físico como la cantidad de información llevada por el sistema. La entropía de un estado puede ser interpretada como la falta de información en el sistema [28]. Un estado puro tendrá entropía cero, es decir que no existe incertidumbre. En general la entropía se define como:

$$S_{(\rho)} = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) = -\sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i), \quad (5.11)$$

donde  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz densidad. Si consideramos el caso de una matriz densidad expresada como  $\rho' = U^\dagger \rho U$ , donde  $U$  es un operador unitario ( $U^\dagger U = \mathbb{I}$ ), entonces la entropía para  $\rho'$  será la misma que para  $\rho$ . Esto se debe a que ambas matrices tienen los mismos autovalores, debido a que  $\rho'$  sólo es una rotación, de la matriz inicial.

## 5.2. Interferómetro con Estados de Inyección Mezclados

Consideremos un sistema con las mismas características que el mostrado en la Figura 3.1 y con la condición de  $L = W$ . A diferencia del caso anterior se inyectará un estado mezclado, caracterizado por una matriz densidad  $\rho_0$ , la cual será expresada de la siguiente forma:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son las amplitudes de probabilidad y la traza de la matriz  $\rho_0$ , cumple con la condición  $\text{Tr} \rho_0 = c_1 + c_2 = 1$ . Las componentes del vector polarización para el estado inicial inyectado se pueden calcular usando la relación (4.3). Se obtiene:

$$P_0^x = 0, \quad P_0^y = 0, \quad P_0^z = P_0 = c_1 - c_2.$$

La polarización para el estado de entrada tiene una sola componente distinta de cero en la dirección  $z$ , la cual depende de las amplitudes  $c_1$  y  $c_2$ . Como se discutió anteriormente el módulo del vector de polarización se encuentra entre cero y uno, entonces  $0 > |c_1 - c_2| > 1$ , ya que es un estado mezclado, y en el caso particular de  $c_1 = c_2 = 1/2$  se tiene un estado completamente despolarizado. Para el análisis que sigue a continuación se considera el caso más general donde  $c_1 \neq c_2$ .

Se inyecta un estado mezclado al sistema, el cual incide sobre el primer beam splitter para luego seguir los caminos uno y dos; éstos son reflejados por los espejos  $M_1$  y  $M_2$ , pasan por el segundo beam splitter y por último son recolectados en los detectores  $D_1$  y  $D_2$ . En este interferómetro se calcularán las matrices densidad en dichos detectores y se analizará la polarización y la entropía en las respectivas salidas. Las matrices densidad a la salida de los detectores  $D_1$  y  $D_2$  son:

$$\rho_{D_1} = \frac{1}{m_1} \mathcal{U}_{D_1} \rho_0 \mathcal{U}_{D_1}^\dagger, \quad (5.13)$$

$$\rho_{D_2} = \frac{1}{m_2} \mathcal{U}_{D_2} \rho_0 \mathcal{U}_{D_2}^\dagger. \quad (5.14)$$

Las expresiones anteriores están normalizadas por su respectivas trazas  $m_1$  y  $m_2$ . Los factores de fase  $\mathcal{U}_{D_1}$  y  $\mathcal{U}_{D_2}$  están definidos por las expresiones (4.12) y (4.13). El estado a la salida, tomando en cuenta ambos detectores se expresa como:

$$\rho_s = m_1 \rho_{D_1} + m_2 \rho_{D_2}. \quad (5.15)$$

El estado a la salida  $\rho_s$  debe tener la información física del sistema, por lo cual dicho estado se puede escribir como rotaciones de  $\rho_s = U \rho_0 U^\dagger$ , donde  $UU^\dagger = \mathbb{I}$ . Esto nos indica que aunque la información local en cada detector se obtiene mediante  $\rho_{D_i}$ , la información total debe estar contenida a la salida. Para obtener los  $\rho_{D_i}$  en los detectores se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos^2 \Lambda_a - \sin^2 \Lambda_a \sin 2\theta, \\
\xi_2 &= \cos \Lambda_a \sin \Lambda_a (\cos \theta + \sin \theta), \\
\xi_3 &= \sin^2 \Lambda_a \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Considerando las definiciones (5.16), la matriz densidad a la salida del detector  $D_1$  toma la siguiente forma:

$$\rho_{D_1} = \frac{1}{m_1} \begin{pmatrix} A_+ \xi_1 - i A_- \xi_3 & -A_+ \xi_2 (1 - i) \\ A_+ \xi_2 (1 + i) & A_+ \xi_2 + i A_- \xi_3 \end{pmatrix} \rho_0 \begin{pmatrix} A_+^* \xi_1 + i A_-^* \xi_3 & A_+^* \xi_2 (1 - i) \\ -A_+^* \xi_2 (1 + i) & A_+^* \xi_1 - i A_-^* \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Donde  $m_1 = \text{Tr}(U_{D_1} \rho_{D_1} U_{D_1}^\dagger)$ . Desarrollando la expresión anterior y considerando nuevamente el caso de un beam splitter simétrico, donde  $r = \frac{i}{\sqrt{2}}$  y  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , se obtiene:

$$\rho_{D_1} = \frac{1}{m_1} \begin{pmatrix} c_1 [\cos \pi \varphi_B \xi_1 + \sin \pi \varphi_B \xi_3]^2 & (1 - i) \sin \pi \varphi_B \xi_2 [\sin \pi \varphi_B P_0 \xi_1 - \cos \pi \varphi_B \xi_3] \\ + 2c_2 \sin^2 \pi \varphi_B \xi_2^2 & \\ (1 + i) \sin \pi \varphi_B \xi_2 [\sin \pi \varphi_B P_0 \xi_1 - \cos \pi \varphi_B \xi_3] & c_2 [\cos \pi \varphi_B \xi_1 + \sin \pi \varphi_B \xi_3]^2 \\ & + 2c_1 \sin^2 \pi \varphi_B \xi_2^2 \end{pmatrix},$$

donde  $P_0$  es la polarización del estado inicial inyectado y la traza  $\rho_{D_1}$  es:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \cos^2 \pi \varphi_B (\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \sin^2 \pi \varphi_B \xi_3^2 \\
&+ 2 \sin \pi \varphi_B \cos \pi \varphi_B P_0 \xi_1 \xi_3.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Usando los resultados anteriores procedemos a calcular las componentes del vector de polarización, para  $\rho_{D_1}$ . Usando (2.2) las componentes de  $\mathbf{P}_{D_1}$  son:

$$\begin{aligned}
P_{D1}^x &= \frac{1}{m_1} 2 \cos \pi \varphi_B \xi_2 (\cos \pi \varphi_B P_0 \xi_1 + \sin \pi \varphi_B \xi_3), \\
P_{D1}^y &= \frac{1}{m_1} 2 \cos \pi \varphi_B \xi_2 (\cos \pi \varphi_B P_0 \xi_1 + \sin \pi \varphi_B \xi_3), \\
P_{D1}^z &= \frac{1}{m_1} (\cos^2 \pi \varphi_B P_0 (\xi_1^2 - 2\xi_2^2) + \sin^2 \pi \varphi_B P_0 \xi_3^2 \\
&\quad + 2 \sin \pi \varphi_B \cos \pi \varphi_B \xi_1 \xi_3).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Como se puede observar en las expresiones anteriores, las componentes de  $\mathbf{P}_{D1}$  tienen una dependencia proporcional a la polarización  $P_0$  del estado inicial inyectado. Para el caso particular de un estado completamente despolarizado  $c_1 = c_2 = 1/2$ , se obtiene polarización a la salida de  $D_1$ . Para este caso tiene que:

$$|P_{D1}| = \frac{\sin 2\pi \varphi_B \xi_3 \sqrt{\xi_1^2 + 2\xi_2^2}}{\cos^2 \pi \varphi_B (\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \sin^2 \pi \varphi_B \xi_3^2}. \tag{5.19}$$

La matriz densidad en el detector  $D_2$  se puede obtener cambiando  $A_{\pm} \rightarrow B_{\pm}$  en (5.2). La traza de  $\rho_{D2}$  es:

$$\begin{aligned}
m_2 &= \sin^2 \pi \varphi_B (\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \cos^2 \pi \varphi_B \xi_3^2 \\
&\quad - 2 \cos \pi \varphi_B \sin \pi \varphi_B P_0 \xi_1 \xi_3.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Las componentes del vector polarización para  $\rho_{D2}$ , se pueden calcular al usar (2.2). Para este caso, dichas componentes son:

$$\begin{aligned}
P_x^{D2} &= \frac{1}{m_2} 2 \sin \varphi_B \xi_2 (\sin \varphi_B P_0 \xi_1 - \cos \pi \varphi_B \xi_3), \\
P_y^{D2} &= \frac{1}{m_2} 2 \sin \varphi_B \xi_2 (\sin \varphi_B P_0 \xi_1 - \cos \pi \varphi_B \xi_3), \\
P_z^{D2} &= \frac{1}{m_2} \sin^2 \pi \varphi_B P_0 (\xi_1^2 - 2\xi_2^2) + \cos^2 \pi \varphi_B P_0 \xi_3^3 \\
&\quad - 2 \sin \pi \varphi_B \cos \pi \varphi_B \xi_1 \xi_3.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

El comportamiento de la polarización en este detector es similar a la del caso anterior. Fácilmente se puede obtener la entropía del estado inyectado, usando la expresión (5.11). Esta es  $S_{(\rho_0)} = -c_1 \ln(c_1) - c_2 \ln(c_2)$ . La entropía a la salida del detector  $D_i$  ( $i=1,2$ ) toma la siguiente forma:

$$S_{(\rho_{D_i})} = -Tr(\rho_{D_i} \ln(\rho_{D_i})). \tag{5.22}$$

La expresión (5.22), nos da solo información local en cada detector. Para estados mezclados se sabe que la entropía será mayor a cero, lo que implica que el módulo del vector polarización no será máximo. Esto nos indica que existe una relación entre la entropía y el vector polarización. La entropía del sistema a la salida, es decir considerando los dos detectores se expresa como  $S_{(\rho_s)} = -Tr(\rho_s \ln(\rho_s))$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se analizó el comportamiento de un interferómetro Mach-Zehnder, para distintas situaciones. Como se mencionó anteriormente, el sistema se caracterizó por estar en presencia de un flujo magnético y por tener interacción espín-órbita tipo Rashba y Dresselhaus, obteniendo así una representación  $SU(2) \times U(1)$ .

Al estudiar el filtro en los ejes no inclinados y considerando sólo valores impares de  $\eta$ , se obtiene una relación entre las constantes de acoplamiento espín-órbita y el flujo magnético, obteniendo como solución hélices, (Figura 4.5). Para este caso es posible obtener una solución localizada, si se cumple  $\sin(\pi\varphi_B + 2\theta) = 0$ , y es posible filtrar en ambas salidas del interferómetro, cuando  $\sin(\pi\varphi_B + 2\theta) = 1$ . También se verificó que el carácter no Abelian de la interacción espín-órbita es suficiente para introducir una diferencia de fase en las señales que llegan a cada detector, y obtener un filtro de espín.

Por último se analizó un interferómetro de brazos simétricos al inyectar un estado mezclado, caracterizado por una matriz densidad  $\rho_0$ . Se encontró en cada detector, que el vector polarización es proporcional al módulo de la polarización del estado inyectado. Como la entropía y la polarización están íntimamente ligadas, cualquiera de estas cantidades puede utilizarse para cuantificar el grado de pureza del estado. En particular, un estado de spin  $1/2$ , puro, está siempre polarizado al máximo, por lo cual la entropía es mínima (nula). En el caso de un estado mixto se tiene entropía distinta de cero. En algunas instancias, emplear la entropía para cuantificar el grado de incertidumbre en la información del estado puede resultar más simple que el cálculo de la polarización.

Al usar la matriz densidad en cada detector para evaluar alguna cantidad física se obtendrá que ésta sólo nos dará información local. En este sentido, es razonable esperar que localmente se estén generando las correlaciones que se observan en el interferómetro. El suponer que los detectores reciben amplitudes que no interfieren, es algo inadecuado porque las señales a la salida están correlacionadas y al eliminar las coherencias (matriz densidad sin elementos fuera de la diagonal), se eliminan las correlaciones. Esto equivale a desechar la información de la interferencia. Resulta interesante notar que este resultado sólo se captura en una formulación de matriz densidad.

# Apéndice A

## Relación de Unitariedad

$$U_{D_1}U_{D_1}^\dagger + U_{D_2}U_{D_2}^\dagger = \mathbb{I} \quad (\text{A.1})$$

Usando las fórmulas (4.12), (4.19) y (5.16) se desarrolla el primer término de la expresión (A.1):

$$\begin{aligned} U_{D_1}U_{D_1}^\dagger &= \\ &\begin{pmatrix} A_+\xi_1 - iA_-\xi_3 & -A_+\xi_2(1-i) \\ A_+\xi_2(1+i) & A_+\xi_1 + iA_-\xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+^*\xi_1 + iA_-^*\xi_3 & A_+^*\xi_2(1-i) \\ -A_+^*\xi_2(1+i) & A_+^*\xi_1 - iA_-^*\xi_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \pi\varphi_B(\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \cos^2 \pi\varphi_B\xi_3^2 & (1-i)\sin 2\pi\varphi_B\xi_2\xi_3 \\ + \sin 2\pi\varphi_B\xi_1\xi_3 & \cos^2 \pi\varphi_B(\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \sin^2 \pi\varphi_B\xi_3^2 \\ (1+i)\sin 2\pi\varphi_B\xi_2\xi_3 & -\sin 2\pi\varphi_B\xi_1\xi_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cambiando  $A_\pm \rightarrow B_\pm$ , se realiza el mismo procedimiento para el segundo término de la expresión (A.1). Se llega a obtener resultado:

$$\left( \begin{array}{cc} \cos^2 \pi\varphi_B(\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \sin^2 \pi\varphi_B\xi_3^2 & -(1-i)\sin 2\pi\varphi_B\xi_2\xi_3 \\ -\sin 2\pi\varphi_B\xi_1\xi_3 & \sin^2 \pi\varphi_B(\xi_1^2 + 2\xi_2^2) + \cos^2 \pi\varphi_B\xi_3^2 \\ -(1+i)\sin 2\pi\varphi_B\xi_2\xi_3 & +\sin 2\pi\varphi_B\xi_1\xi_3 \end{array} \right)$$

Sumando  $U_{D_1}U_{D_1}^\dagger + UD_2U_{D_2}^\dagger$  se obtiene:

$$(\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la definición (5.16) se puede encontrar la siguiente relación:  $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ . Fácilmente se verifica que  $U_{D_1}U_{D_1}^\dagger + U_{D_2}U_{D_2}^\dagger = \mathbb{I}$

# Apéndice B

## Gráficas en Mathematica 5.0

### Filtro en ejes no inclinados

Se define:

$$\text{In}[1]=\tau = (2l + 1)Pi/2$$

$$\text{In}[2]=l = 0$$

$$\text{In}[3]=\eta_1 = 1$$

### Gráfico correspondiente a la relación entre $\alpha$ , $\beta$ y $\varphi_B$

Gráfico correspondiente a  $\eta_1$

$$\text{In}[4]=\text{ParametricPlot3D}[\{\eta_1 \tau \text{Cos}[Pi/2 \varphi_B], \eta_1 \tau \text{Sin}[Pi/2 \varphi_B], \varphi_B\}, \{\varphi_B, 0, 14\},$$

$$\text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\alpha, \beta, \varphi_B\}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{1, 1, 1\}]$$

### Gráfico correspondiente a la amplitud en coordenadas polares para $\eta_1$

$$\text{In}[5]=\text{PolarPlot}[\text{Sin}[2 \text{Pi} \varphi_B], \{\varphi_B, 0, \text{Pi} + 0.4\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 800]$$

### Filtro en ejes inclinados

### Gráfico correspondiente a la relación entre $\alpha$ , $\beta$ y $\cos \pi \varphi_B$

$$\text{In}[6]=\text{ContourPlot}[(\text{Sin}[\text{Sqrt}[\text{alfa}^2 + \text{beta}^2]] \text{Sin}[\eta \text{Sqrt}[\text{alfa}^2 + \text{beta}^2]] (\text{alfa}^2 - \text{beta}^2))/(\text{alfa}^2 + \text{beta}^2),$$

{*alfa*, -2 Pi, 2 Pi}, {*beta*, -2 Pi, 2 Pi}, PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 800, Contours -> 20]

Los valores de  $\eta$  toman valores enteros, fraccionarios ó irracionales.

# Bibliografía

- [1] Eugen Merzbacher, Quantum Mechanics (John Wiley & Sons, Inc), 1961.
- [2] Hans-Andreas Engel, Emmanuel I. Rashba and Bertran I. Halperin, Theory of Spin Hall Effect in Semiconductors, arXiv:cond-mat/0603306v3 [cond-mat.mes-hall], (2007).
- [3] Ronald Winkler, Spin-orbit coupling effect in two-dimensional electron and hole systems (Springer), 2003.
- [4] C.N. Yang and R.L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Physical Review, Volume 96, No 1 (1954).
- [5] David Griffiths, Introduction to Elementary Particles (John Wiley & Sons, Inc), 1987.
- [6] Richard Feynman y Robert B. Leighton, Física Volumen III: Mecánica cuántica (Addison-Wesley Iberoamerica, S.A), 1987.
- [7] C. Cohen and Tannoudji, Quantum Mechanics volume I (Wiley-Interscience Publication), 1977.
- [8] Sol Wieder, The Foundations of Quantum Theory (Academic Press, Inc), 1973.
- [9] E Medina, A. López and B. Berche, Gauge symmetry breaking and topological quantization for the Pauli Hamiltonian, EPL, 83 (2008), 47005.
- [10] C. Kittel, Quantum theory of solids, (John Wiley & Sons, Inc), 1963.
- [11] E.I Rashba, Electron spin operation by electric fields: spin dynamics and spin injection, Physica E 20 (2004) 189-195.

- [12] Emmanuel I. Rashba, Spin-orbit coupling and spin transport, arXiv:cond-mat/0507007v2 [cond-mat.mes-hall], (2005).
- [13] E. B. Sonin, Proposal for Measuring Mechanically Equilibrium Spin Currents in the Rashba Medium, Physical Review Letters, 266602 (2007).
- [14] I. V. Tokatly, Equilibrium spin currents: Non-Abelian gauge invariance and color diamagnetism in condensed matter, Rev. Lett. 101, 106601 (2008).
- [15] Naomichi Hatano, Ryoen Shirasaki, Hiroaki Nakamura, Non-Abelian gauge field theory of the spin-orbit interaction and a perfect spin filter, Physical Review A 75, 032107 (2007).
- [16] Alexander López, Ernesto Medina, Nelson Bolívar and Bertrand Berche, Mach Zehner spin interferometer for Rashba and Dresselhaus media: Exact solutions for a perfect spin filtering, arXiv:0903.2468v1 [cond-mat.mes-hall], (2009).
- [17] Karl Blum, Density Matrix Theory and Applications (Plenum Press), 1981.
- [18] Lewis H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press), 1985.
- [19] Gasiorowicz Stephen, Quantum Physics (John Wiley & Sons, Inc.), 1996.
- [20] Zyun Francis Ezawa, Quantum Hall: Effect Field theoretical Approach and Related Topics (World Scientific), 2000.
- [21] Y. Aharonov and D Bohm, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, The Physical Review. vol 115, No. 3 (1959).
- [22] R. G. Chambers, Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux, Physical Review Letters, volume 5, No. 1 (1960).
- [23] Y, Aharonov and Casher, Topical Quantum Effects for Neutral Particle, Physical Review Letters, volume 53, No. 4 (1984).
- [24] A. Cimmino, G. L. Opat and A. G. Klein, Observation of topological Aharonov-Casher phase shift by neutron interferometry, Physical Review Letters, Volume 63, No 4 (1989).
- [25] Yang Ji, Yunchui Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu & Hadas Shtrikman, An electronic Mach-Zender Interferometer, Letters to Nature, Vol 422 (2003).

- [26] G. Feve, W.D. oliver, M. Aranzana and Y. Yamamoto, Rasba effect within the coherent scattering formalism, *Physical Review B* 66, 155328 (2002).
- [27] Son-Hsien Chen and Ching-Ray Chang, Non-Abelian spin-orbit gauge: Persistent spin helix and quantum square ring, *Physical Review B* 77, 045324 (2008).
- [28] Masanori Ohya and Dénes Petz, *Quantum Entropy and Its Use* (Springer-Verlag), 1993.